

Problèmes de géométrie au cycle 3



La géométrie à l'école

- Parent pauvre de l'enseignement des mathématiques ?
- Mauvais souvenirs des enseignants ?
- Peu de travaux de recherche sur le sujet en premier degré

Que veut-on que les élèves apprennent en géométrie ?

Pour les enseignants :

- Maniement des instruments
- Précision des tracés
- Vocabulaire spécifique

Et pour l'institution ?

*"À l'articulation de l'école primaire et du collège, le cycle 3 constitue une étape importante dans **l'approche des concepts géométriques**.*

*Prolongeant le travail amorcé au cycle 2, les activités permettent aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets [...] et leurs propriétés sont essentiellement contrôlés par **la perception** à une géométrie où le **recours à des instruments** devient déterminant, pour aller ensuite vers une géométrie dont la validation s'appuie sur le raisonnement et l'argumentation.*

*Différentes caractérisations d'un même objet [...] permettent aux élèves de passer **du regard ordinaire** porté sur un dessin **au regard géométrique** porté sur une figure."*

Et pour l'institution ?

*"Les situations faisant appel à différents types de tâches (reconnaître, nommer, comparer, vérifier, décrire, reproduire, représenter, construire) portant sur des objets géométriques, sont privilégiées afin de faire **émerger des concepts géométriques** [...] et de les enrichir."*

"Les professeurs veillent à utiliser un langage précis et adapté pour décrire les actions et les gestes réalisés par les élèves."

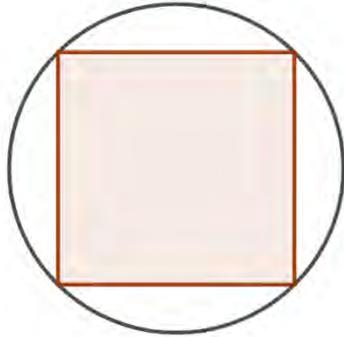
Eduscol, BO 26 juillet 2018

Trois approches de la géométrie

- Intuition
- Expérience
- Dédution

« Être géomètre c'est ne pas confondre une évidence issue de l'intuition avec un renseignement issu de l'expérience, et le résultat d'une expérience avec la conclusion d'un raisonnement. » (GONSETH F., 1955)

Un premier exemple de problème

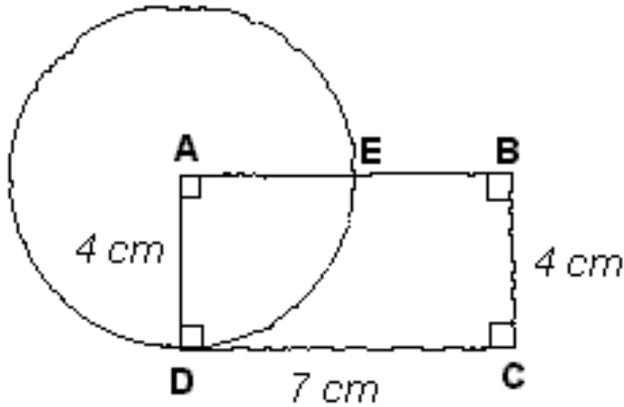


Voici une figure composée **d'un** carré et **d'un** cercle.

Vous devez la reproduire, la figure est déjà commencée : deux côtés du carré sont déjà tracés.



Et un deuxième



Sur ce dessin à main levée, on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D. Les mesures réelles sont en centimètres.

Ce cercle coupe le segment [AB] au point E. Trouve la longueur du segment [EB].

.....

Explique ta réponse :.....

.....

3 niveaux de géométrie

- I : Géométrie naturelle
- II : Géométrie axiomatique naturelle
- III : Géométrie axiomatique formaliste

Différences entre géométrie I et II :

	Géométrie I	Géométrie II
Mesurage	Licite et producteur de connaissances	Illicite pour la production, licite pour l'heuristique
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Outil heuristique, support du raisonnement.
Preuve	Evidence, contrôle par instrument (dont la fonction « <i>drag</i> ⁶ » des logiciels dynamiques) ou construction effective avec raisonnement	Axiomatisation partielle. Propriétés, théorèmes et « îlots de démonstration »

3 niveaux de géométrie



	Géométrie naturelle I
Intuition	Sensible, liée à la perception, enrichie par l'expérience
Expérience	Liée à l'espace mesurable
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience par la vue
Type d'espace	Espace intuitif et physique
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation
Aspect privilégié	Evidence et construction

3 niveaux de géométrie

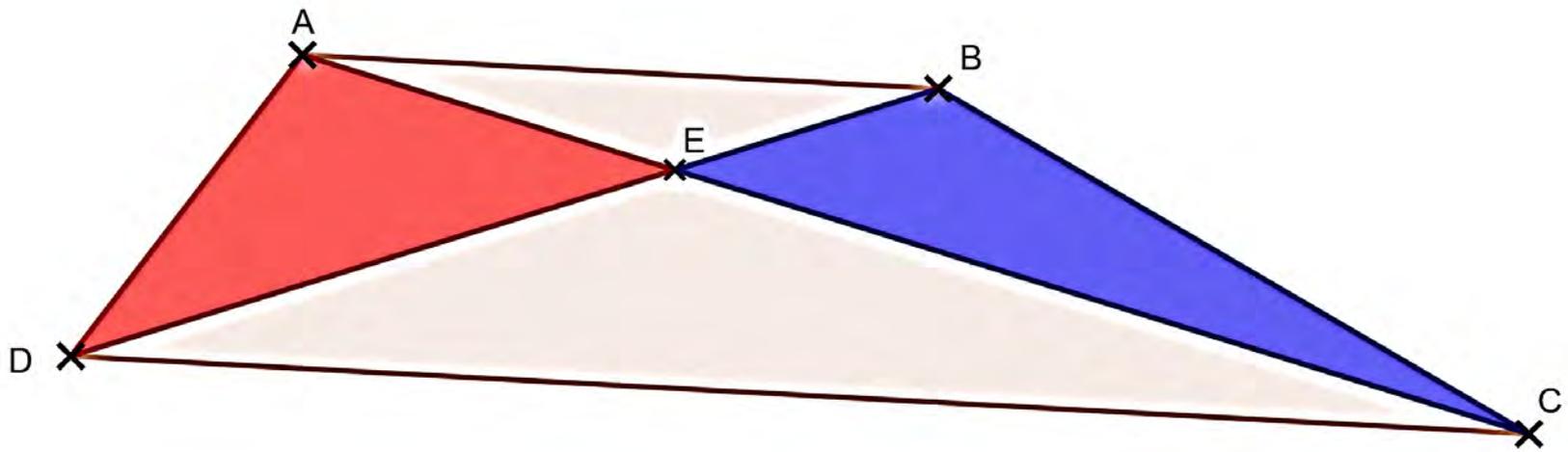
	Géométrie naturelle I	Géométrie axiomatique naturelle II
Intuition	Sensible, liée à la perception, enrichie par l'expérience	Liée aux figures
Expérience	Liée à l'espace mesurable	Schéma de la réalité
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience par la vue	Démonstration basée sur des axiomes
Type d'espace	Espace intuitif et physique	Espace physico-géométrique
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Outil pour chercher, conjecturer
Aspect privilégié	Evidence et construction	Propriétés et démonstration

3 niveaux de géométrie

	Géométrie naturelle I	Géométrie axiomatique naturelle II	Géométrie axiomatique formaliste III
Intuition	Sensible, liée à la perception, enrichie par l'expérience	Liée aux figures	Interne aux mathématiques
Expérience	Liée à l'espace mesurable	Schéma de la réalité	De type logique
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience par la vue	Démonstration basée sur des axiomes	Démonstration basée sur des axiomes
Type d'espace	Espace intuitif et physique	Espace physico-géométrique	Espace abstrait euclidien
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Outil pour chercher, conjecturer	Outil heuristique
Aspect privilégié	Evidence et construction	Propriétés et démonstration	Démonstration Et lien entre les objets.

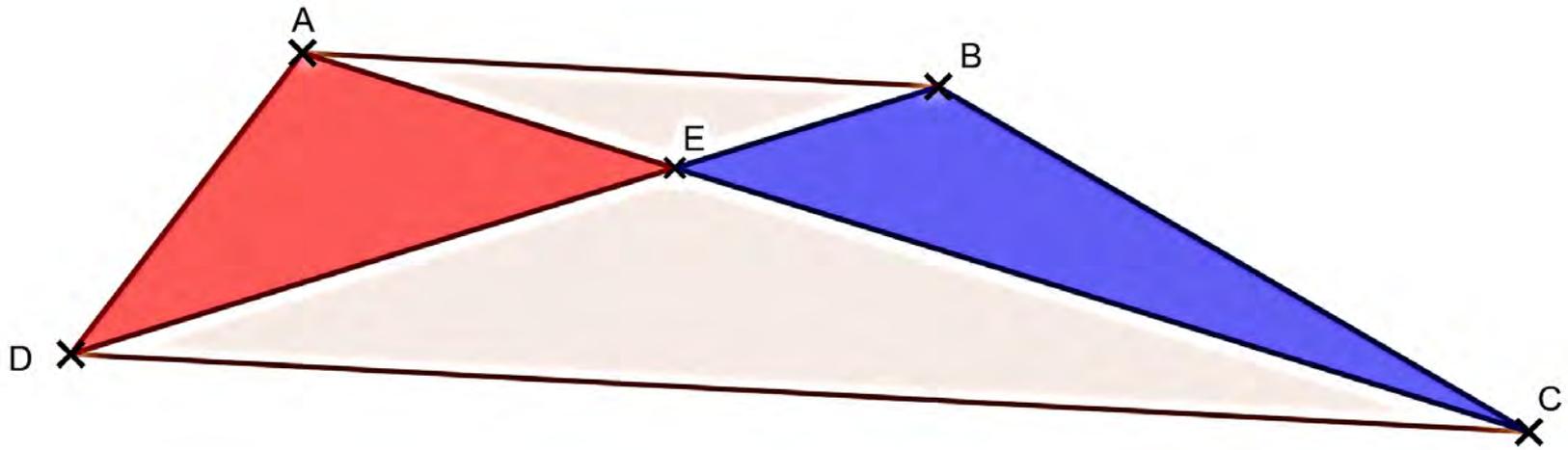
Un exemple : calcul d'aires dans un trapèze

Montrer que les triangles AED et BEC ont la même aire.



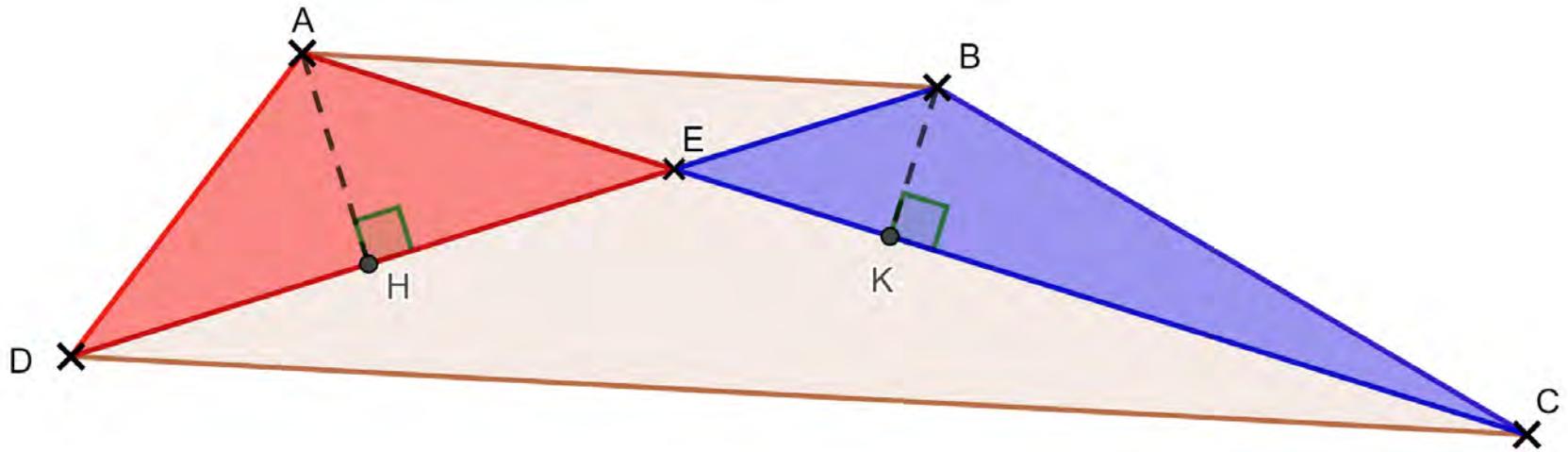
Première méthode : on découpe et on colle ...

Montrer que les triangles AED et BEC ont la même aire.



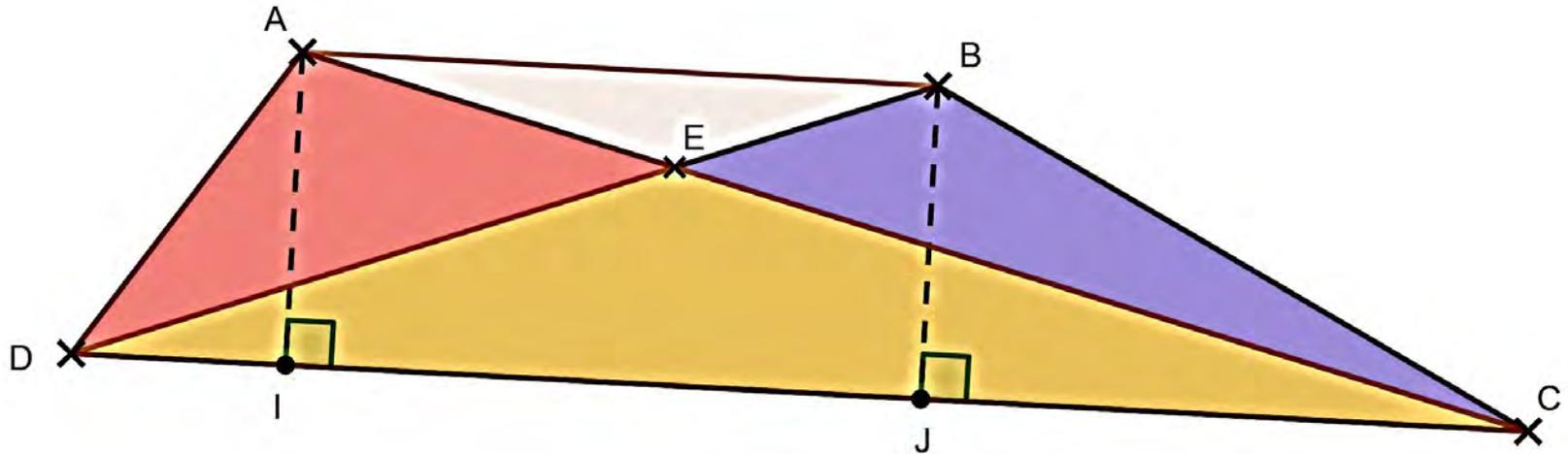
Deuxième méthode : On trace, on mesure, on calcule ...

Montrer que les triangles AED et BEC ont la même aire.



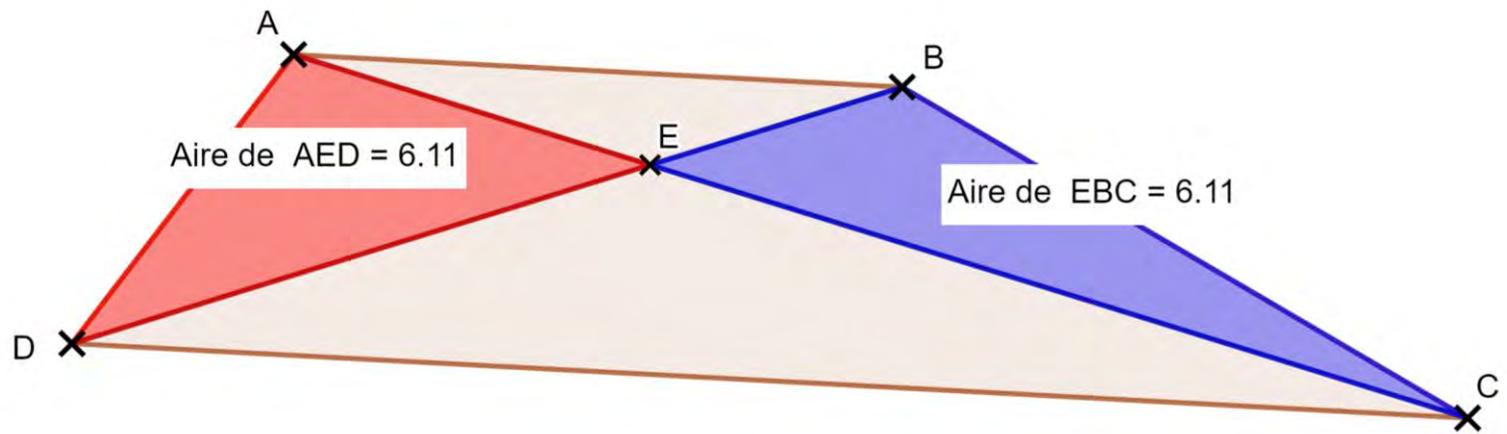
Troisième méthode : on utilise les propriétés géométriques

Montrer que les triangles AED et BEC ont la même aire.

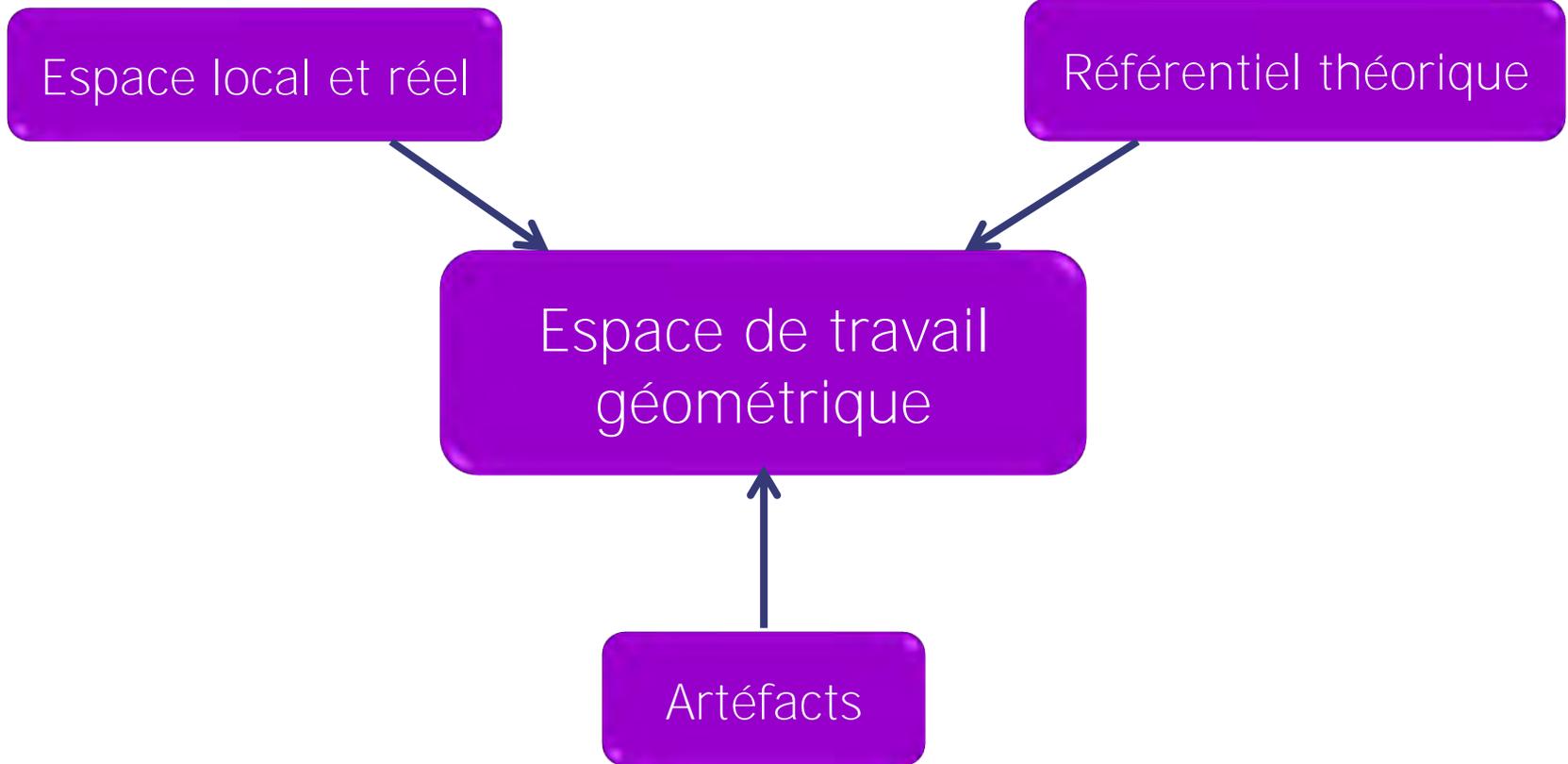


Avec GeoGebra

Montrer que les triangles AED et BEC ont la même aire.



Espace de travail géométrique



3 types d'espace



- Le Micro-espace
- Le Méso-espace
- Le macro-espace



⇒ La conception de la géométrie est
différente dans chacun de ces milieux

Poser un problème de géométrie

- A quel niveau ?
- Quel est l'espace de travail ?

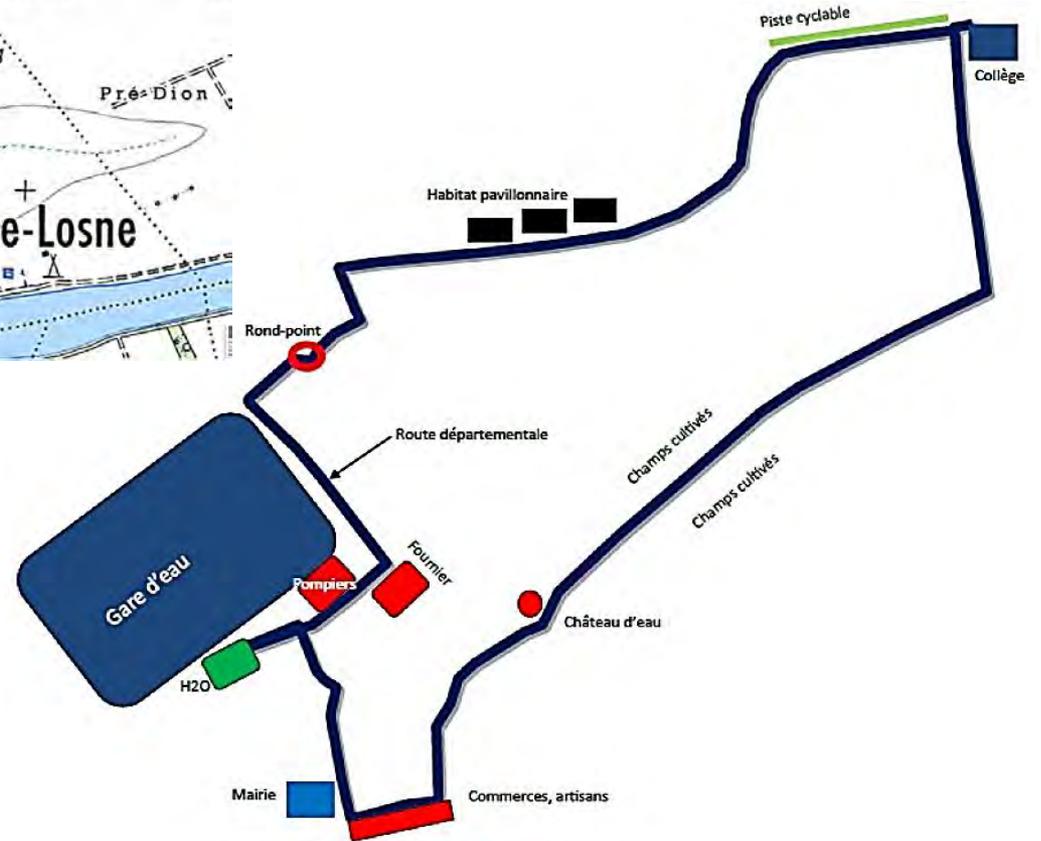
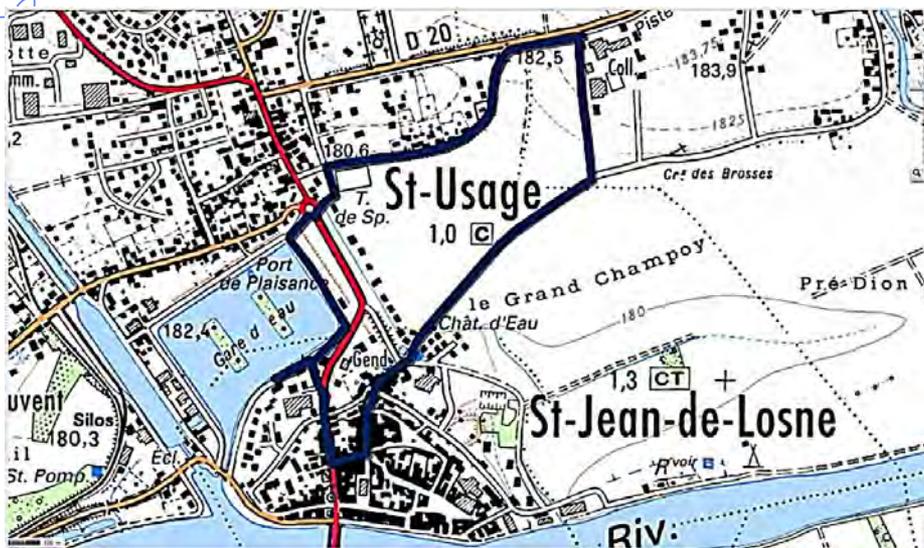
6 compétences en mathématiques

- Chercher
- Modéliser
- Représenter
- Raisonner
- Calculer
- Communiquer

Un problème

- Comprendre
- Chercher

Modéliser



Modéliser

Videos\vlc-record-2019-12-06-
17h14m50s-▶ Cours de mathématiques
au château de Guédelon par Hein
Koenen-.mkv

Représenter : Dessiner

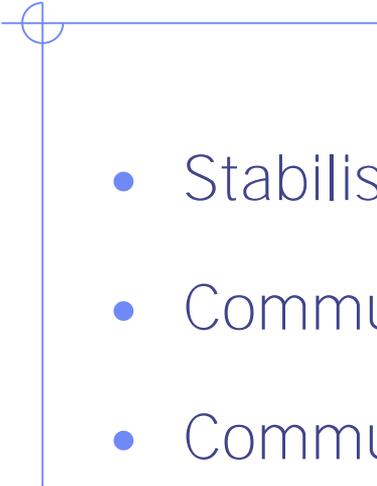


- Dessin à main levée
- Créativité et esthétique
- Multiplier les points de vue

Raisonner : déduction, induction, expérimentation

- Inférence
- Analogie
- Attention
- Mémoire
- Langage

Dire



- Stabiliser le vocabulaire
- Communication orale
- Communication écrite
- Polysémie

Géométrie mentale

- **Donner aux élèves la possibilité d'envisager mentalement une figure,** indépendamment des contraintes de tracé aux instruments.
- Faire utiliser le vocabulaire géométrique en situation et évaluer sa compréhension et sa mobilisation.
- **Favoriser la liaison entre la description d'une figure et sa représentation graphique.**
- **Montrer l'intérêt du tracé à main levée pour représenter une figure géométrique et en percevoir les propriétés.**
- Permettre une prise de conscience des propriétés des figures et une approche de **l'argumentation.**
- Faire évoluer chez les élèves le statut de la figure géométrique, en dépassant le simple dessin géométrique aux instruments.

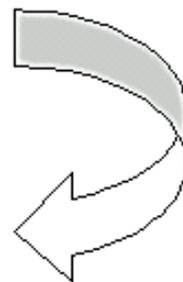
Géométrie mentale : fonctionnement

Un texte descriptif ou constructif, est **donné oralement**, évoquant une figure géométrique simple

Au signal, les élèves font **un tracé à main levée** sur une feuille ou sur leur ardoise. Durée : 1 min environ

Echanges sur les productions réalisées, correction des erreurs, mise au point du vocabulaire géométrique et des propriétés des figures.

Le texte est lu deux fois lentement ; les élèves écoutent et réfléchissent.



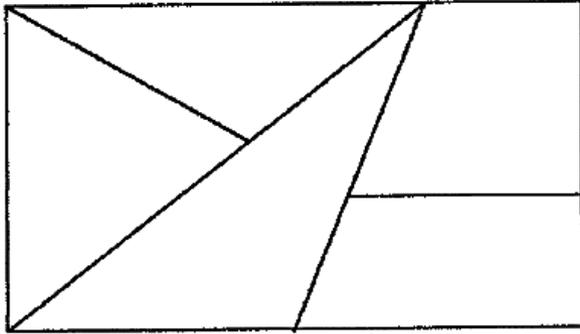
Géométrie mentale : Des exemples

1. Trace une ligne courbe ouverte.
2. Trace une ligne courbe fermée.
3. La figure est formée d'une ligne droite et d'un point placé sur la ligne.
4. La figure se compose d'une ligne droite et d'un point placé à l'extérieur de la ligne.
5. La figure se compose d'une ligne droite et de trois points, deux sur la droite et un à l'extérieur de la droite.
6. La figure se compose d'un segment de droite et d'un point placé au milieu du segment.

Situation problème

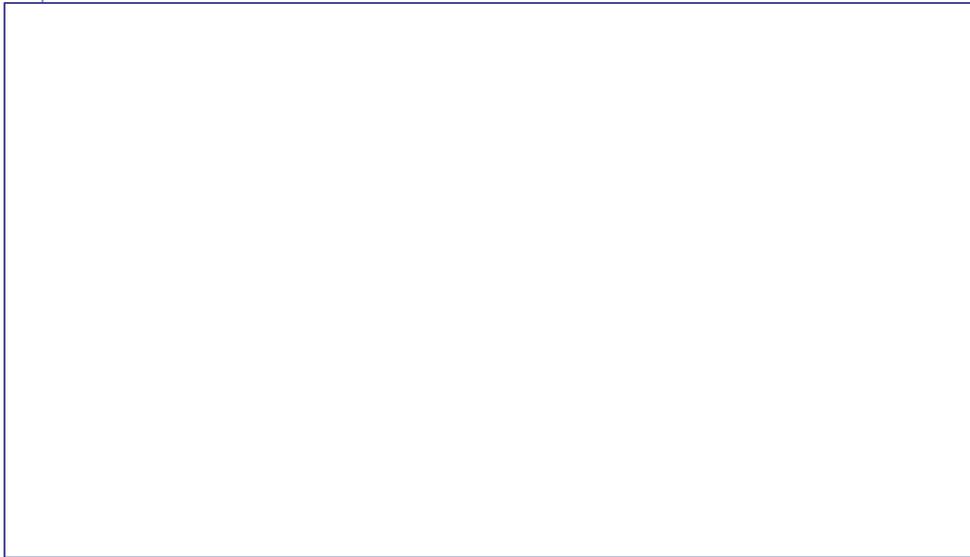
Un problème qui vise la construction d'une connaissance nouvelle :

- L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution du problème.
- Les connaissances anciennes sont en principe insuffisantes pour **qu'il le résolve immédiatement**
- La situation-**problème doit permettre à l'élève de décider si une solution trouvée est convenable ou pas**
- La connaissance que l'on désire voir acquérir par l'élève doit être l'outil le plus adapté pour la résolution du problème au niveau de l'élève



Vous devez terminer l'agrandissement de la figure sur la feuille distribuée. Vous disposez pour cela de tous vos instruments de géométrie et de papier calque (si nécessaire).

Vous n'êtes pas autorisés à calculer.

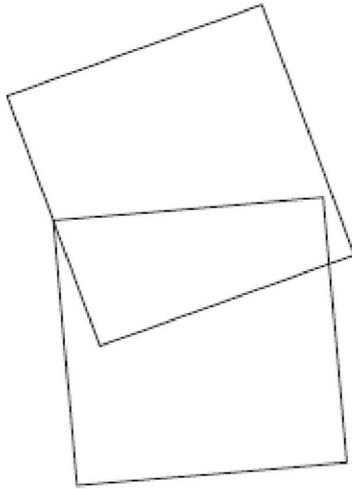


Un exemple en CM2

Construction de la notion d'angle

Cap Maths CM2, mon cahier de recherches,
guide du maître

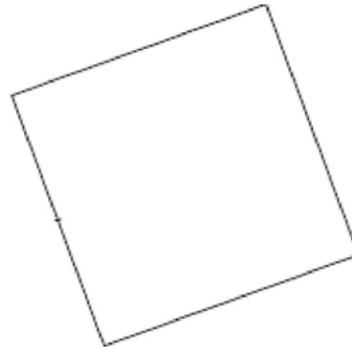
Hatier 2018



Agrandissement

Fiche 8

Complète l'agrandissement de ce carré.



Fiche 9

- Préciser la consigne :

➔ *Sur la feuille qui vient de vous être distribuée, un seul des deux carrés de l'agrandissement est reproduit.*

Sur cet agrandissement, le sommet du deuxième carré, qui est sur un côté du premier carré, est marqué. Vous allez devoir terminer cet agrandissement. Pour cela vous disposez du modèle, du premier agrandissement, de vos instruments de géométrie et d'un morceau de papier calque. Vous allez réfléchir à deux comment faire et, ensuite, chacun fera la construction sur sa fiche.

Pour réussir, les élèves doivent utiliser la conservation de l'égalité des longueurs (côtés des carrés) et la conservation des angles, notamment l'angle \widehat{DEH} ou l'angle \widehat{DEF} .

Pour reporter l'angle sur la figure à compléter, les élèves pourront soit utiliser le morceau de papier calque, soit reproduire l'angle par transparence en plaçant sur le modèle ou le premier agrandissement la feuille sur laquelle est tracée la figure à compléter, en faisant coïncider les milieux des deux côtés et les côtés portant ces milieux.

Agrandir une figure

- Pour résoudre le problème, on a utilisé le fait que certaines propriétés ont été conservées entre le modèle et la figure agrandie.

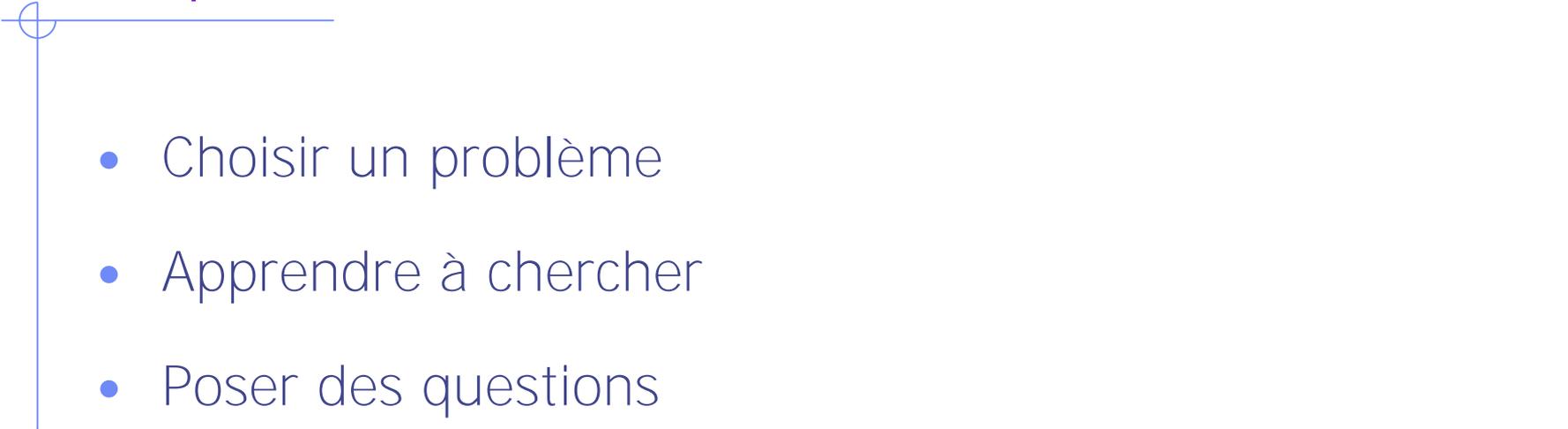
Exemples :

- Sur le modèle, un sommet du second carré est le milieu d'un côté du premier carré, c'est encore vrai sur l'agrandissement.
- L'angle formé par deux des côtés des carrés est le même sur le modèle et sur l'agrandissement. C'est le cas des angles \widehat{DEF} et \widehat{DEH} .
- Les deux carrés ont leurs côtés de même longueur sur le modèle et sur l'agrandissement.
- La forme des figures est conservée : l'agrandissement d'un carré est un carré.
- Pour agrandir une figure, connaître les longueurs ne suffit pas toujours, les angles peuvent être utiles.

Conceptions de l'apprentissage et de l'enseignement

- Point de vue constructiviste sur l'apprentissage
- Pour que l'élève donne du sens aux concepts qu'il rencontre
- **Le nouveau se construit à partir de l'ancien**
- Résolution de problèmes => la construction des connaissances

Un problème



- Choisir un problème
- Apprendre à chercher
- Poser des questions
- Inventer des problèmes

Différents types de problèmes

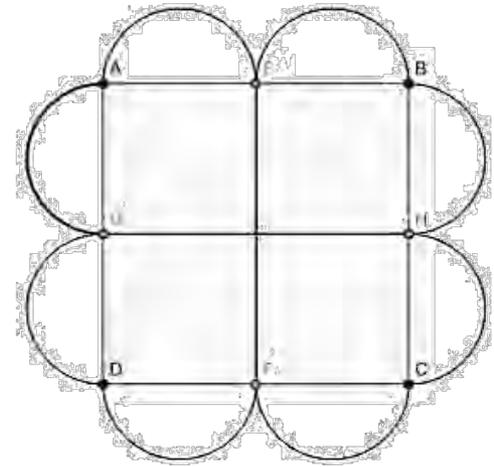
- Reconnaitre
- Nommer
- Vérifier
- Décrire
- Reproduire
- Compléter
- Construire
- Représenter
- Justifier
- Se déplacer

Reconnaître

Géométrie dynamique

- Les trois figures

Décrire



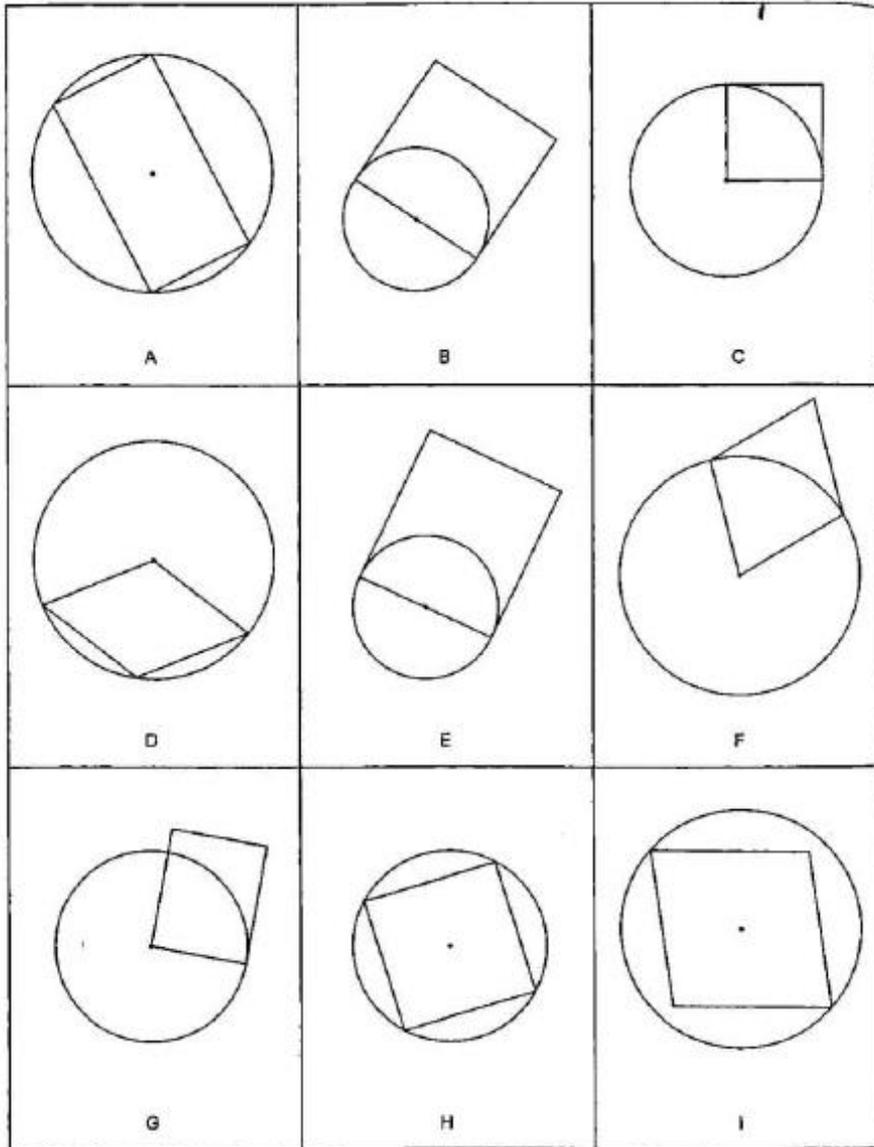
Dictée à l'adulte géométrique :

- Les élèves sont tous en possession de la reproduction d'une figure
- Le maître est au tableau et fait comme s'il ne connaissait pas la figure
- Les élèves en donnant des indications précises doivent permettre au maître de réaliser la figure sous la dictée..

Décrire

- Pour reconnaître
- Pour construire

<http://www.reseau-canope.fr/bsd/sequence.aspx?bloc=570958#haut>



CAP Maths CM1 fiche 110 matériels photocopiables

Les élèves (éventuellement par binômes) reçoivent une de ces figures (pas la même pour tous).

La consigne est donnée en deux temps :
 1er temps : « Rédige un message pour permettre à un autre élève de reconnaître la figure. »

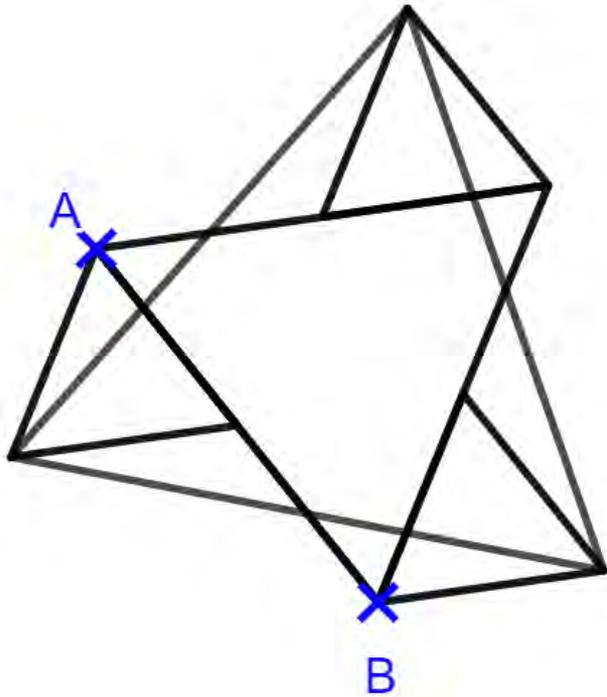
2è temps après échanges des messages : « Avec le message que tu as reçu, retrouve la figure parmi celles de la fiche. »

Décrire : symétrie

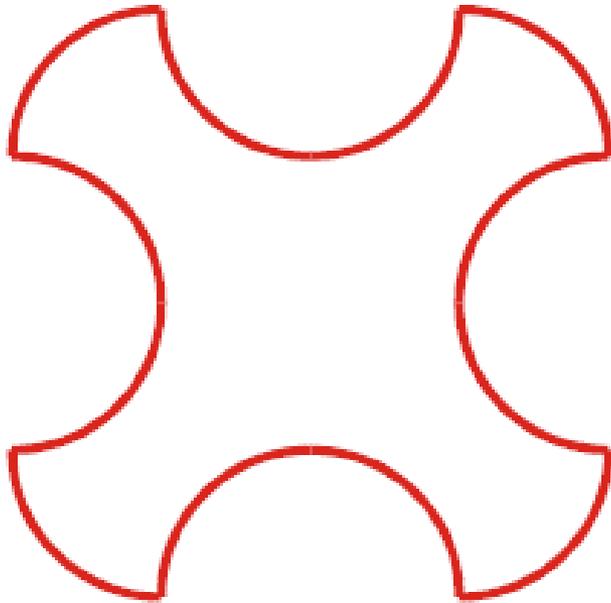
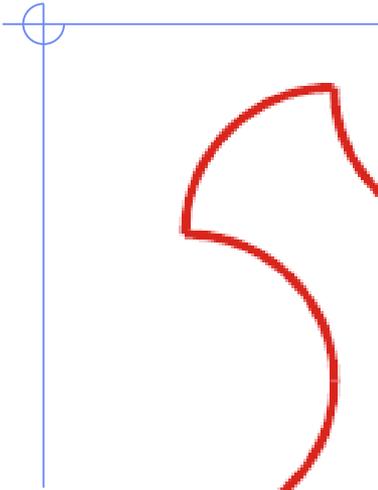
M@ths en-vie



Reproduire une figure



*Reproduire cette figure sachant que
le segment $[AB]$ mesure 6 cm.
(figure 2)*



*Reproduire à l'identique la
figure suivante (figure 3)*

Comment appréhender une figure ?

- Appréhension perceptive
- Appréhension séquentielle
- Appréhension opératoire
- Appréhension discursive

Appréhension perceptive

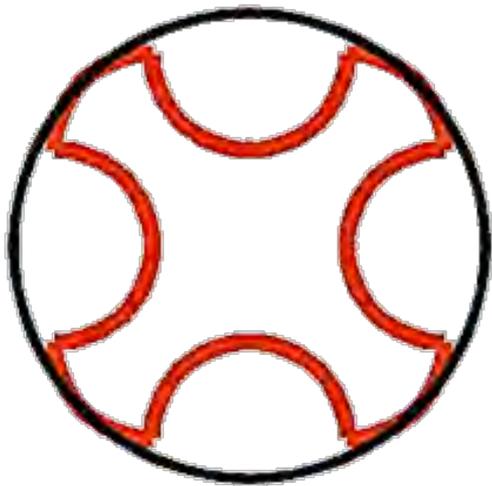
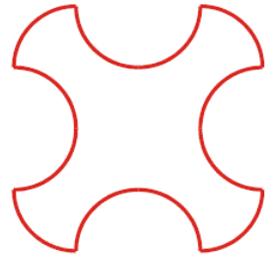


Fig. 2

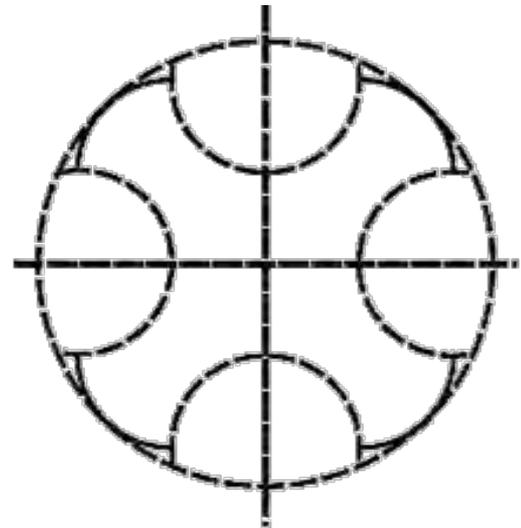
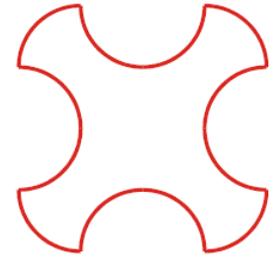
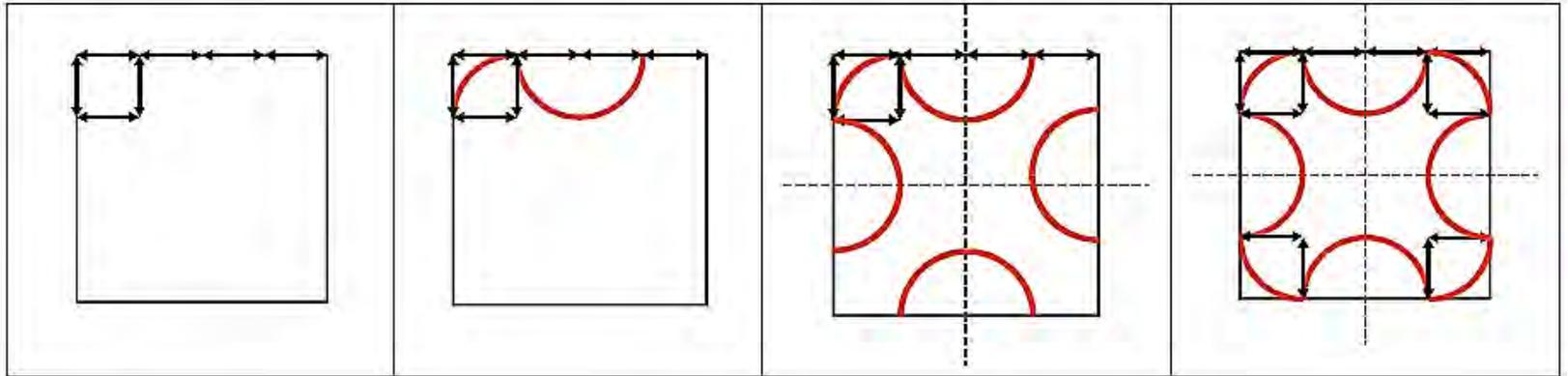


Fig. 3

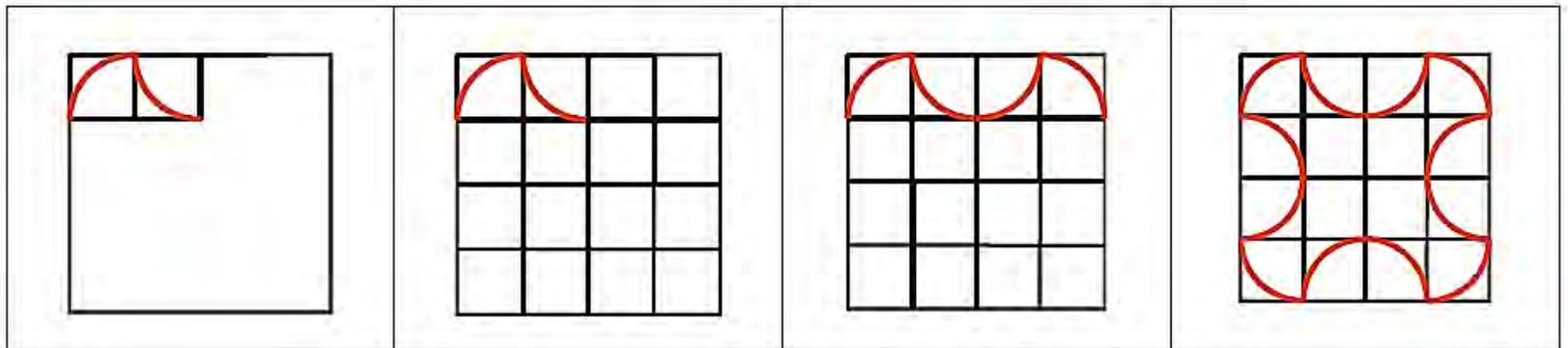
Appréhension séquentielle



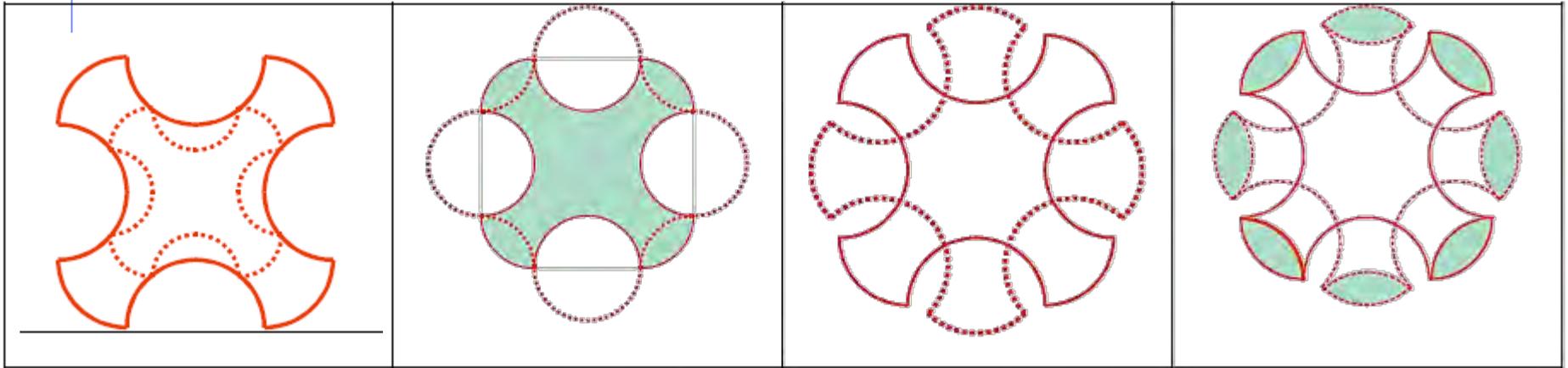
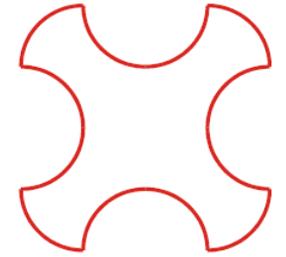
1^{ère} construction :



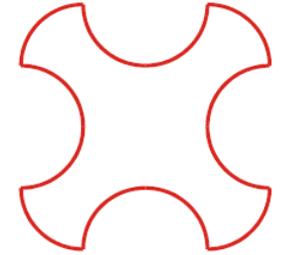
2^{ème} construction :



Appréhension opératoire



Appréhension discursive



- 1ère description : « Cette figure est composée de quatre quarts de cercle et de quatre demi-cercles de même rayon. Les centres des demi-cercles sont les sommets **d'un** carré ; les centres des quarts de cercles sont les milieux des côtés du carré. Le rayon des demis ou quarts de cercles est le quart de la diagonale ».
- 2ème description : « Cette figure est incluse dans un carré, les milieux des côtés sont les centres de 4 demi cercles ayant comme rayon le quart du côté, les quarts de cercles complétant la figure ont le même rayon et pour centres les milieux des demi-diagonales du carré ».

Décomposer une figure en unités figurales élémentaires

- De dimension 0 : les points
- De dimension 1 : lignes droites (droites, demi-droites, segments) et les lignes courbes (arcs de cercle)
- De dimension 2 : une zone ouverte ou fermée: angle, **intersection de 2 droites, polygone, cercles, ovales, ...**

Décomposer une figure en unités figurales élémentaires

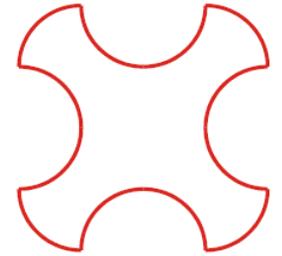


figure fermée de dimension 2 : il faut :

- *Identifier les quarts de cercle et les demi-cercles en tant que tels **c'est**-à-dire la décomposer en 8 éléments de dimension 1 avant de commencer*
- *Etablir les relations existant entre ces différents éléments.*

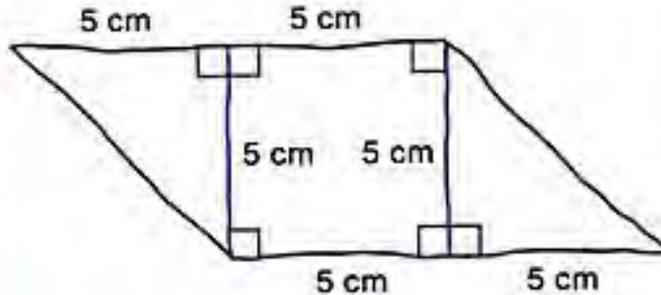
Construire

A partir d'un dessin à main levée

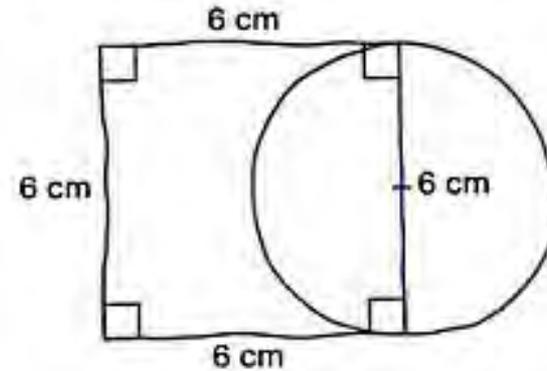
Entretien

Construire à partir d'un dessin à main levée

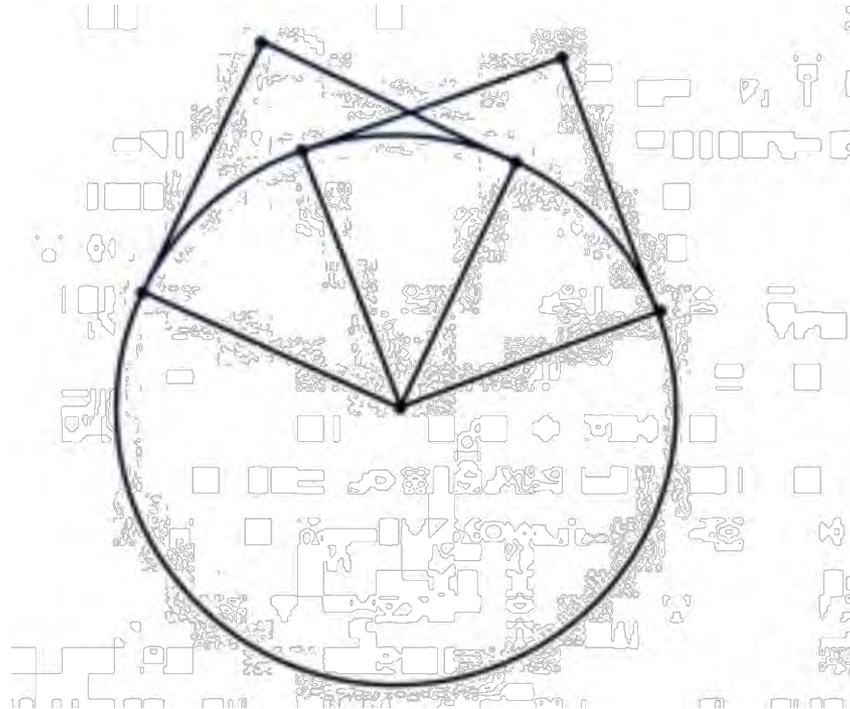
1. Voici un dessin à main levée d'une figure.
Le dessin n'est pas en vraie grandeur.
Construis cette figure en vraie grandeur sur
papier uni, avec tes instruments de géométrie.



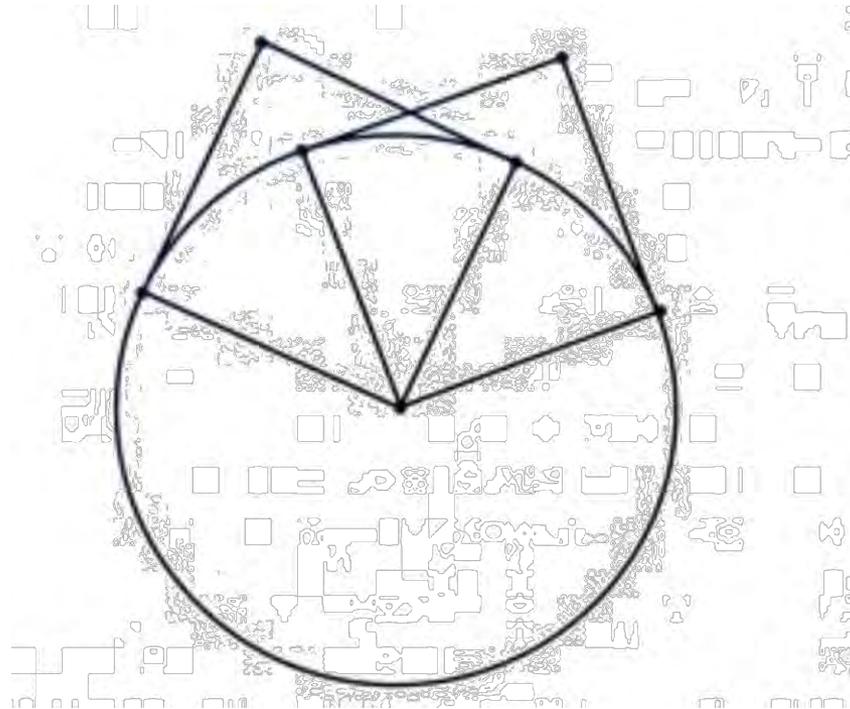
2. Fais de même pour cet autre
dessin à main levée.



Toujours à main levée



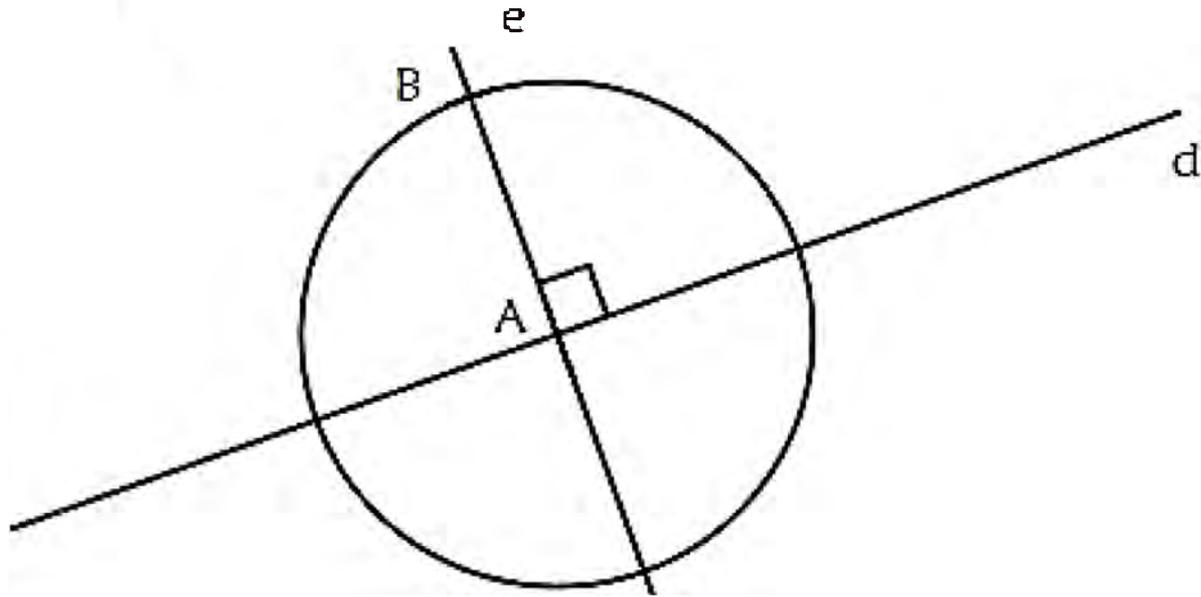
Toujours à main levée



Construire

A partir d'un programme de construction

- *Tracer une droite d.*
- *Placer un point A sur la droite d.*
- *Tracer la droite e, perpendiculaire à d et passant par A.*
- *Placer un point B sur la droite e, tel que $AB = 5 \text{ cm}$.*
- *Tracer le cercle de centre A et de rayon AB.*

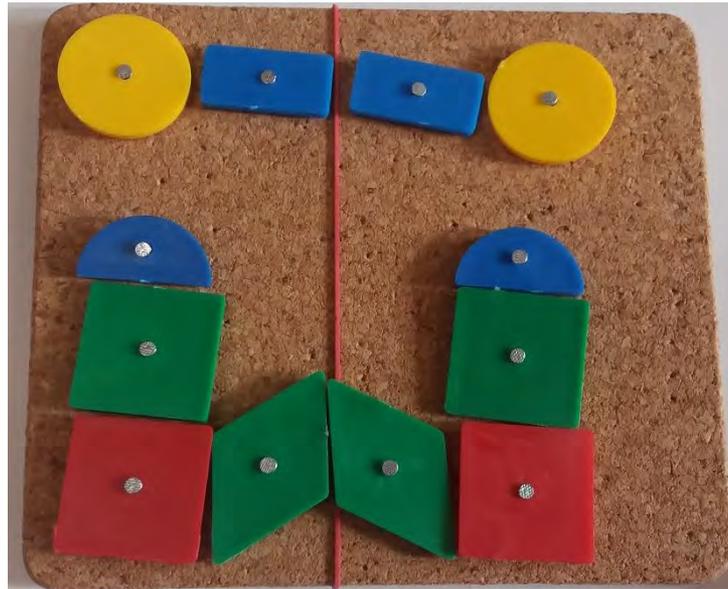


Construire

- Copie flash
- Figure sur le mur du fond
- En suivant la construction du maître

Construire : symétrie axiale

- Faire vivre la symétrie



Situation des napperons

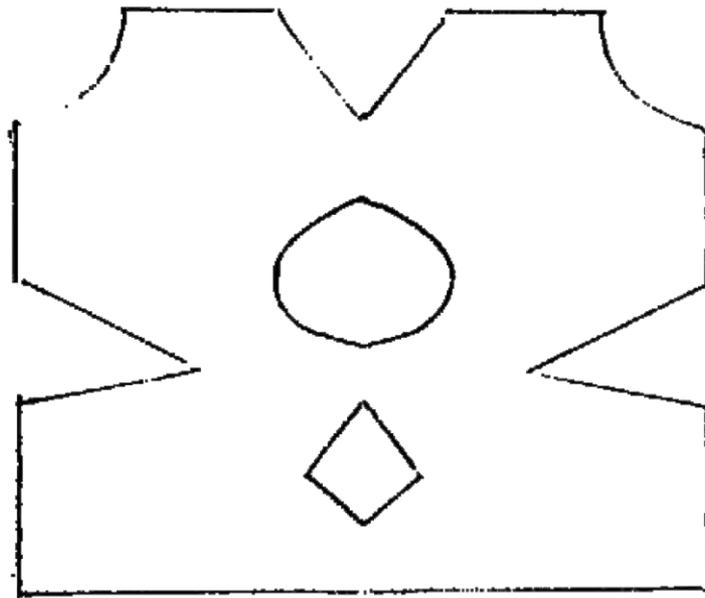
Consigne : Vous devez reproduire le napperon qui est affiché.

Pour cela vous devez :

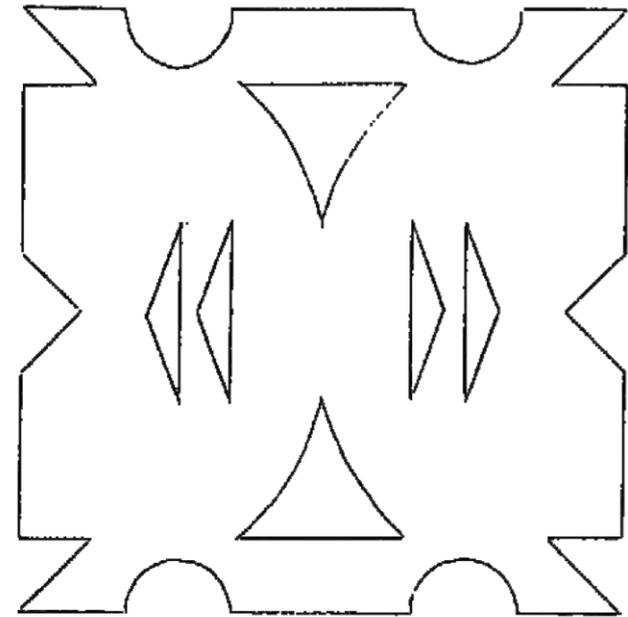
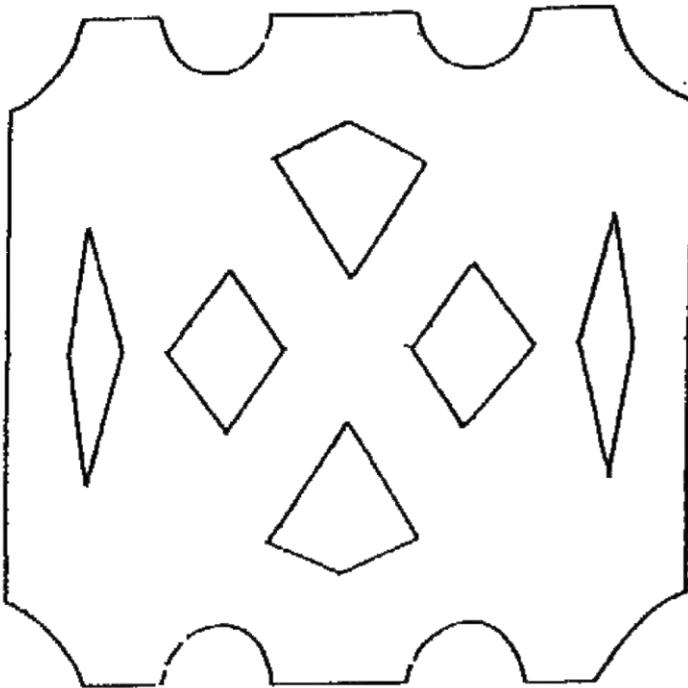
- effectuer ***tous les pliages*** que vous jugez nécessaires,
- puis, ***sans déplier***, vous devez effectuer ***tous les découpages*** que vous jugez nécessaires,
- enfin vous déplierez et comparerez votre réalisation avec le modèle.

S'il y a conformité, vous avez « gagné », sinon, vous conservez votre réalisation, *sans la froisser, sans la jeter*, pour pouvoir l'étudier et vous recommencez avec un autre papier . »

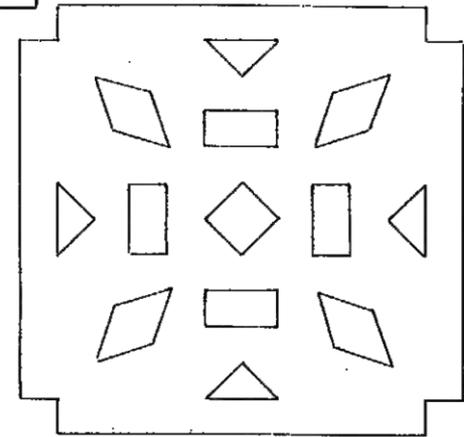
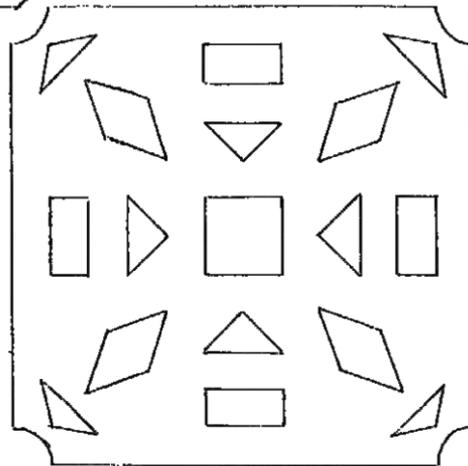
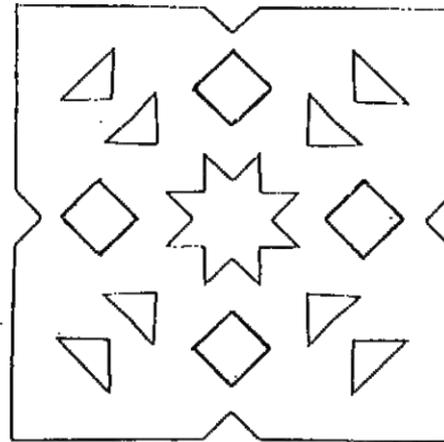
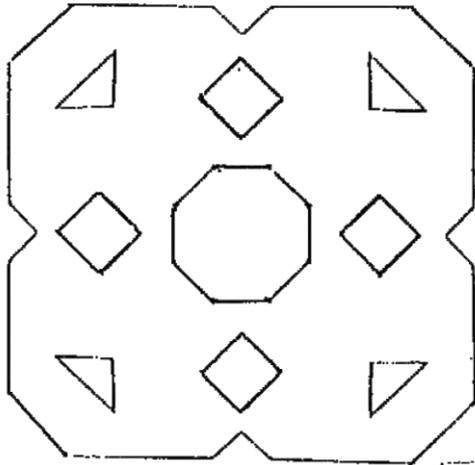
Situation des napperons : une première situation



Situation des napperons : on complexifie



Situation des napperons : on complexifie un peu plus



Situation des napperons : pour terminer ?



Représenter

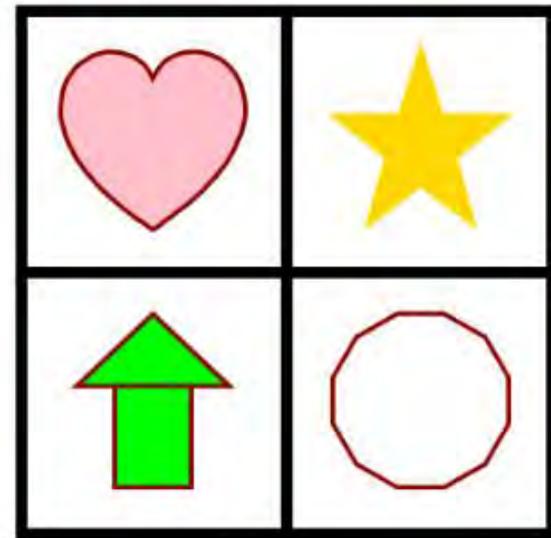
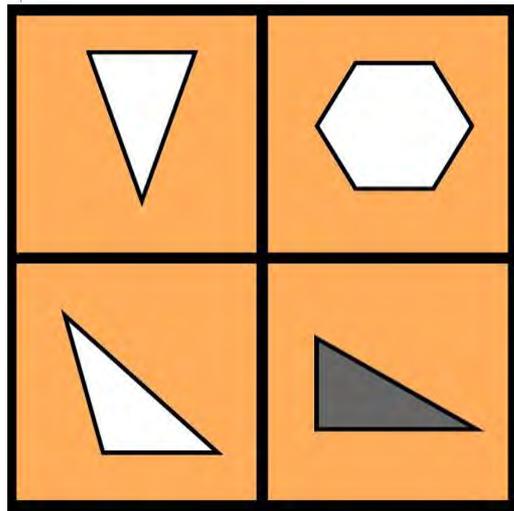
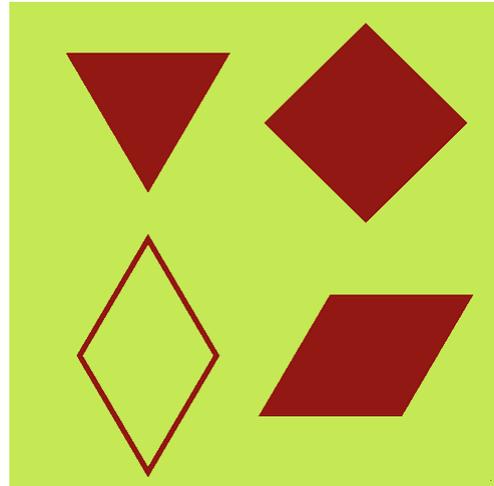
Pour un objet
de l'espace

- Maquette
d'un château



Justifier

- QELI



Se repérer, se déplacer

- En débranché



Quelles variables didactiques ?

- Agrandie ou identique
- Orientation
- Papier
- Instruments autorisés
- **Type de géométrie !**

Quelle institutionnalisation ?

- A ne pas négliger : construction du concept
- Méthodologie

Quelle institutionnalisation ?

Exemples :

- *Un point est défini par l'intersection de deux droites (ou de deux lignes si on travaille avec des arcs de cercles) ;*
- *Par deux points distincts, il passe une droite et une seule ;*
- *Des points alignés sont des points sur une même droite ;*
- *On peut toujours prolonger un segment, le segment ayant pour **support une droite...***

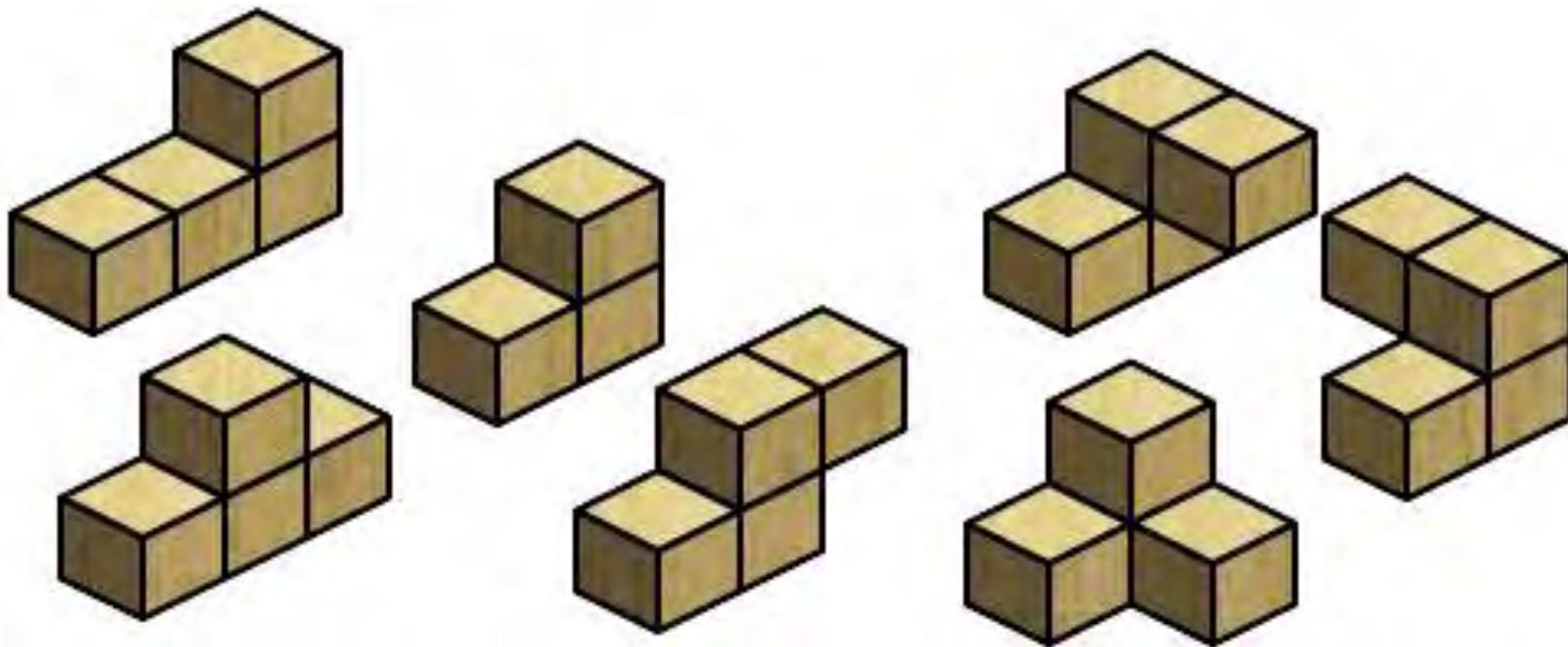
Méthodologie :

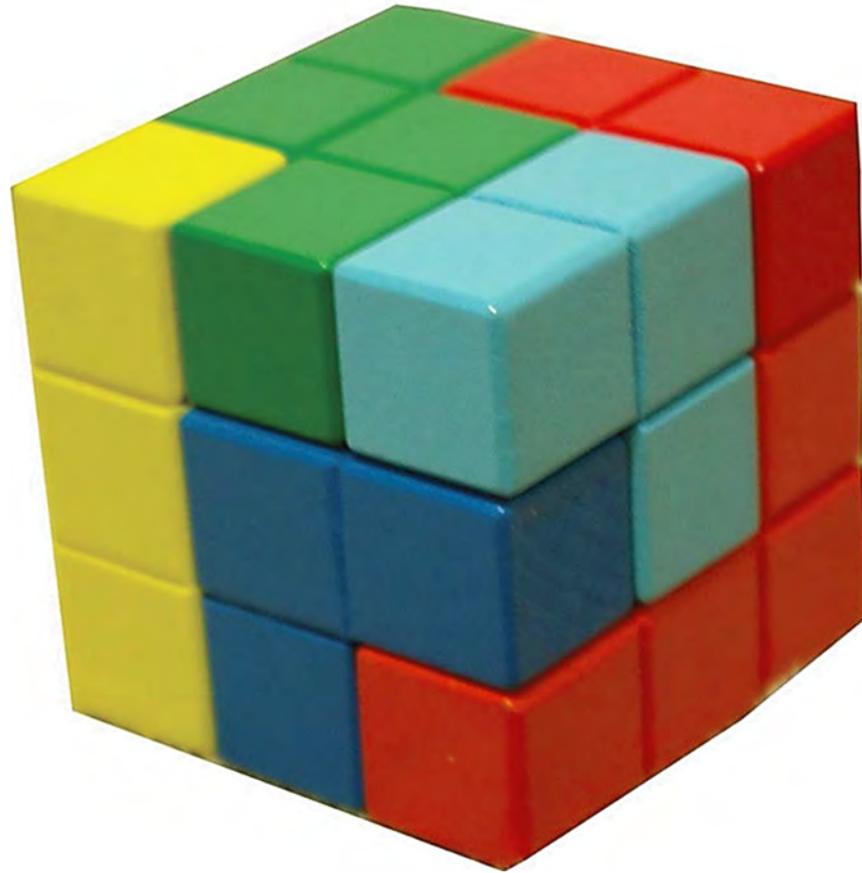
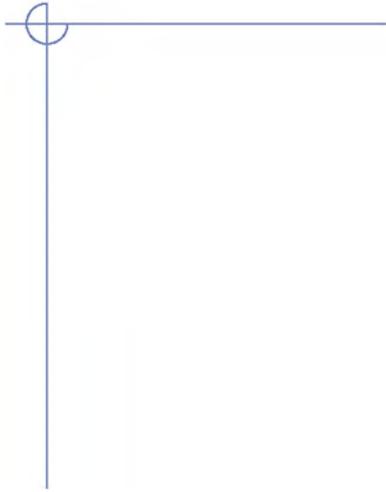
« Pour reproduire la figure, je dois repérer les éléments qui la composent (demi-cercles, quarts de cercles, symétries, milieux, alignements...) et pour cela je peux tracer sur le modèle des traits de construction qui auraient été effacés. »

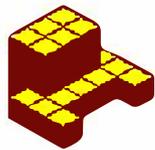
Des exemples d'activités et de matériel

- Cubes somas
- Polydrons
- Tangram
- Géoplan
- Géométrie dynamique
- Origami

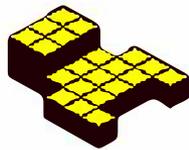
Les cubes Soma



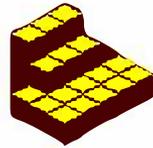




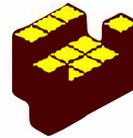
601



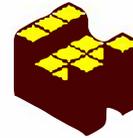
602



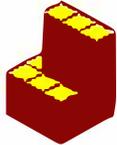
603



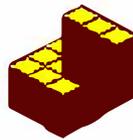
604



605



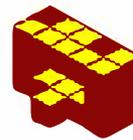
606



607



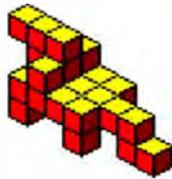
608



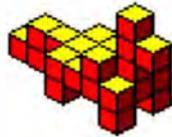
609



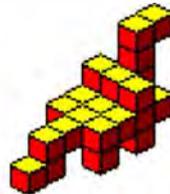
610



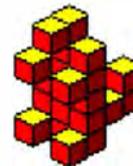
611



612



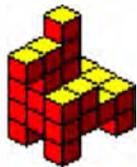
613



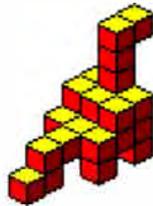
614



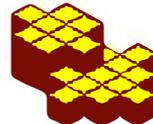
615



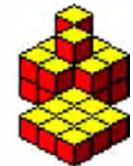
616



617



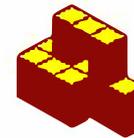
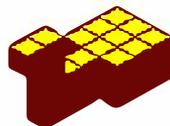
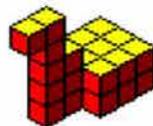
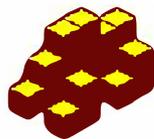
618



619



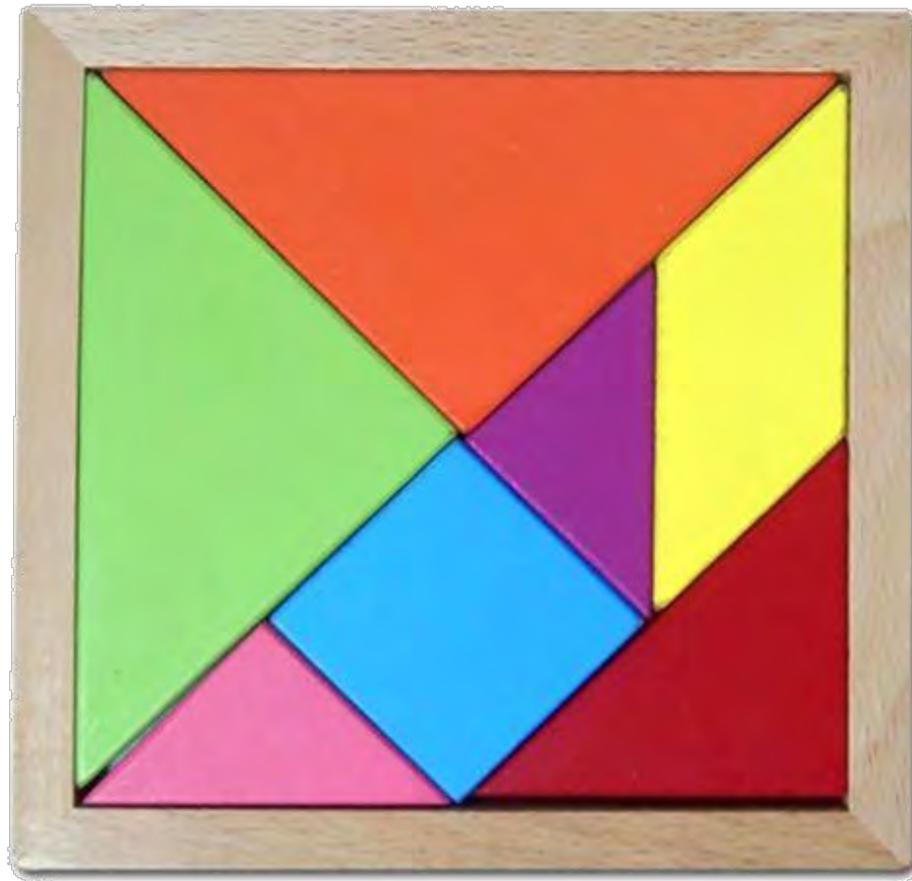
620



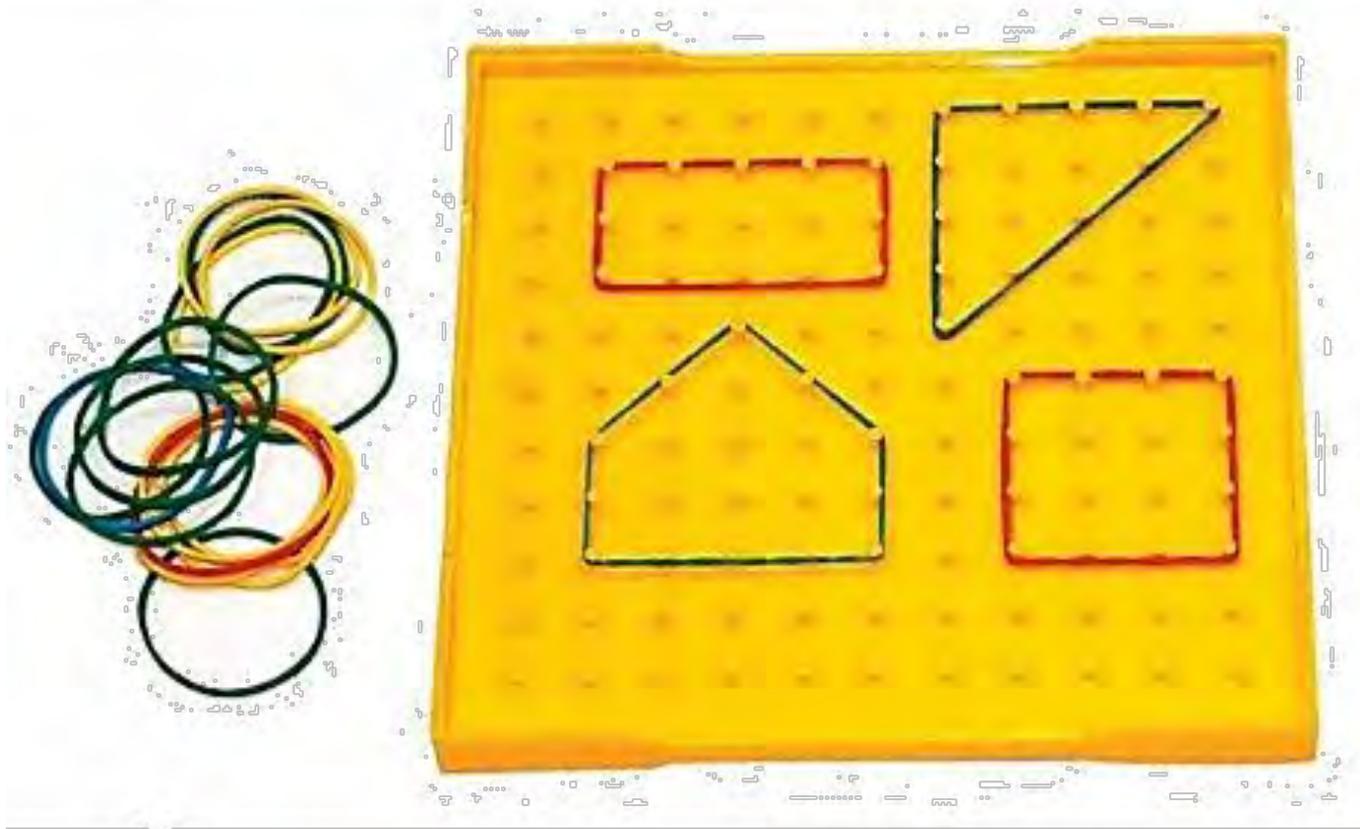
Polydrons



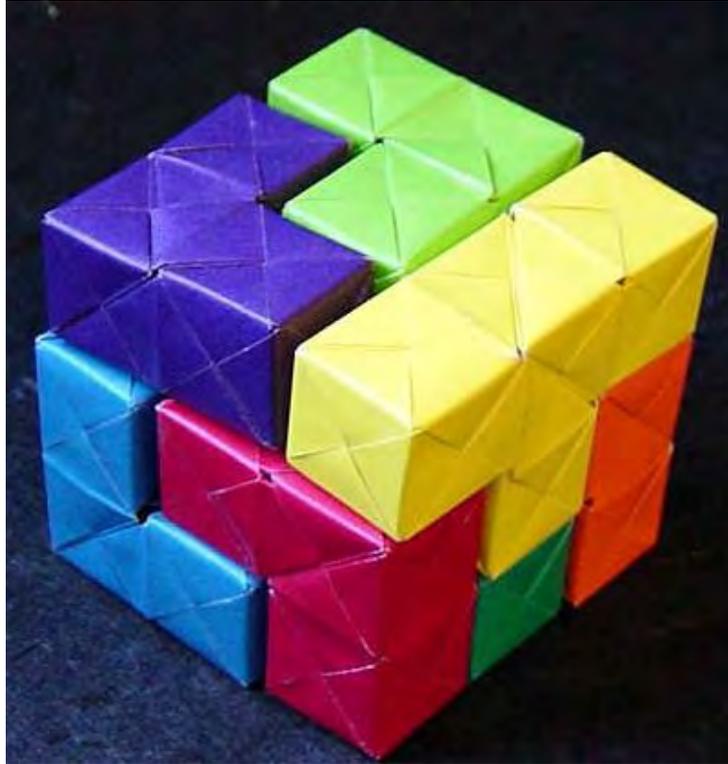
Tangram



Géoplan



Origami



Laboratoire de mathématiques



(Thierry Dias)

Créer un laboratoire de mathématiques

- Un projet pédagogique
- Une démarche
- Un lieu
- Du matériel

Créer un laboratoire de mathématiques : un cahier de laboratoire

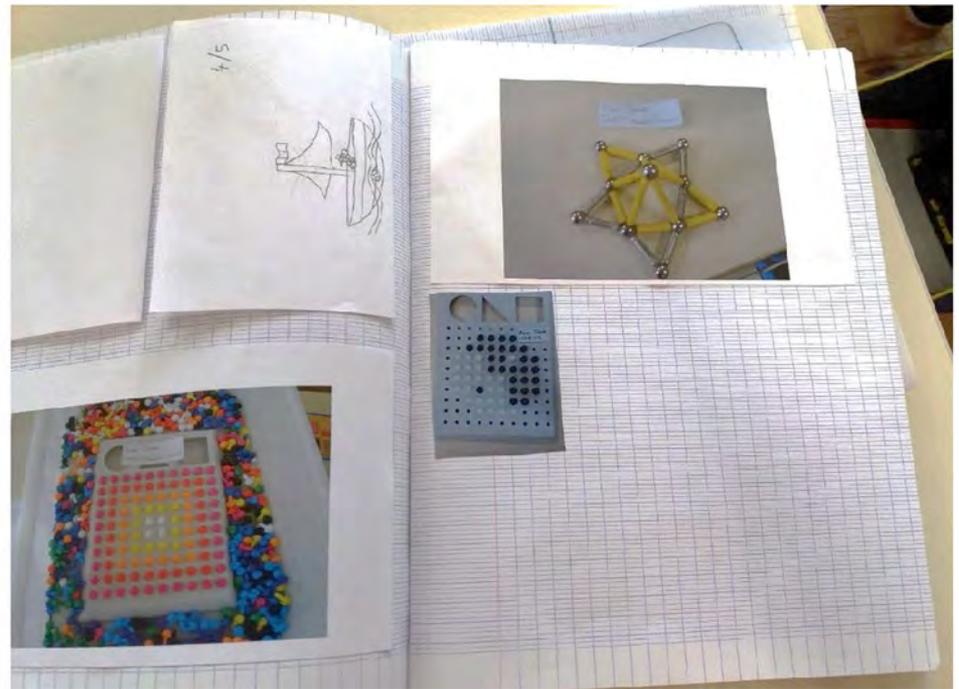
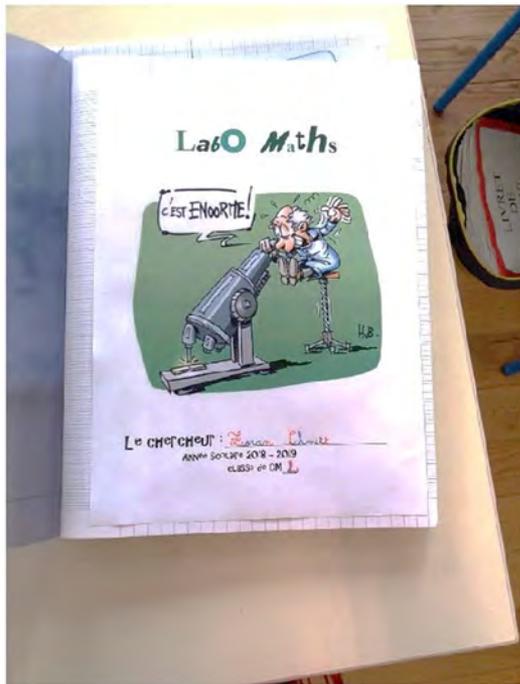
1. Ce que l'on cherche
2. Ce que l'on fait
3. Ce que l'on découvre
4. Ce que l'on a appris

Des exemples concrets



CM1-CM2





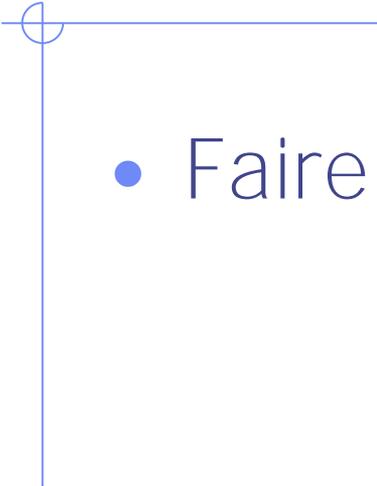
Pour conclure

- **La géométrie n'est pas une leçon de chose**
 - Il ne suffit pas de présenter les objets géométriques, il faut des actions concrètes
 - Faire vivre les concepts
- **Faire de la géométrie, c'est résoudre des problèmes**

Pour conclure



- Modes de validation
- Importance du langage
- **Usage d'instruments**

- 
- Faire faire de la géométrie !

Merci de votre attention !

Bibliographie

- *La géométrie plane du cycle 3 au collège, trois modules de formation* (IREM de Lyon, 2013)
- *Enseignement de la géométrie à l'école : enjeux et perspectives* (COPIRELEM 2013)
- *Les changements de regard nécessaires sur les figures* (Raymond Duval et Marc Godin, 2005)
- *De nouveaux savoirs en géométrie pour les enseignants ?* (Catherine Houdement, 2009)
- *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie* (Catherine Houdement, Alain Kuzniak, 2006)
- ***L'apprentissage de l'abstraction*** (Britt-Mari Barth, 2018)
- *Nous sommes tous des mathématiciens : Des clés pour faire aimer les maths à vos élèves* (Thierry Dias, 2015)
- *Enseignement de la géométrie : quels objectifs prioritaires dans la formation des enseignants ?* (COPIRELEM, juin 2014)
- ***Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie.*** (Guy Brousseau, 2000)
- Eduscol
- <http://jean-luc.bregeon.pagesperso-orange.fr/Page%203-9.htm>