FRACTIONS ET DECIMAUX

Du point de vue historique :

Les 1ères fractions

On trouve trace des fractions dans les civilisations anciennes vers -3000 en Mésopotamie, vers -2000 en Egypte, vers -1800 chez les Babyloniens, vers – 1300 en Chine.
Les fractions sont utilisées dans la résolution de pb concrets : mesurage pour retracer des terrains après les crues du Nil, mesures de quantités et calculs pour les échanges commerciaux
La notation fractionnaire avec la barre de fraction est un héritage du monde arabe. Leurs mathématiciens sont parmi les premiers à accorder un statut de nombre à un rapport de grandeurs.

L'écriture décimale

En 1585, l'édition de la Disme de Stévin, ingénieur Hollandais, mettent en avant les avantages de l'écriture décimale. Dans son traité, Stévin s'adresse à tous ceux qui sont amenés à faire des calculs. Il propose une nouvelle écriture des nombres qui permet d'éviter les calculs lourds de fractions pour se ramener aux techniques opératoires utilisées sur les entiers.
Contrairement aux fractions, les nombres décimaux apparaissent en réponse à des pbs théoriques (le système métrique devient obligatoire en 1837. L'imposition des nouvelles unités fait que l'utilisation des décimaux se popularise rapidement. Les nombres décimaux permettent d'approcher tout nombre réel d'aussi près que l'on veut)
On rencontre très tôt des écritures décimales (les prix, le thermomètre, contenance des bouteilles).

Du point de vue des programmes :

En CM1

Fractions

Ce que sait faire l'élève

- L'élève utilise les fractions simples (comme $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{2}$) dans le cadre de partage de grandeurs ou de mesures de grandeurs, et des fractions décimales ($\frac{1}{10}, \frac{1}{100}$) ; il fait le lien entre les formulations en langage courant et leur écriture mathématique (par exemple faire le lien entre « la moitié de » et $\frac{1}{2}$ dans l'expression « une demi-heure »).
- L'élève manipule des fractions jusqu'à $\frac{1}{1000}$.
- L'élève donne progressivement aux fractions le statut de nombre.
- Il connaît diverses désignations des fractions : orales, écrites et des décompositions additives et multiplicatives (ex : quatre tiers ; $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$; $1 + \frac{1}{3}$; $4 \times \frac{1}{3}$).
- Il les positionne sur une droite graduée.
- Il les encadre entre deux entiers consécutifs.
- Il écrit une fraction décimale sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.
- Il compare deux fractions de même dénominateur.
- Il ajoute des fractions décimales de même dénominateur.

Décimaux

Ce que sait faire l'élève

- L'élève utilise les nombres décimaux.
- Il connaît les unités de la numération décimale (unités simples, dixièmes, centièmes) et les relations qui les lient.
- Il comprend et applique aux nombres décimaux les règles de la numération décimale de position (valeurs des chiffres en fonction de leur rang).
- Il connaît et utilise diverses désignations orales et écrites d'un nombre décimal (fractions décimales, écritures à virgule, décompositions additives et multiplicatives).
- Il utilise les nombres décimaux pour rendre compte de mesures de grandeurs. Il connaît le lien entre les unités de numération et les unités de mesure (par exemple : dixième → dm , dg, dL ; centième → cm, cg, cL, centimes d'euro.
- Il repère et place un nombre décimal sur une demi-droite graduée adaptée.
- Il compare, range des nombres décimaux.
- Il encadre un nombre décimal par deux nombres entiers.

En CM2

Fractions

Ce que sait faire l'élève

- L'élève utilise les fractions simples (comme $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{2}$) dans le cadre de partage de grandeurs ou de mesures de grandeurs, et des fractions décimales ($\frac{1}{10}, \frac{1}{100}$) ; il fait le lien entre les formulations en langage courant et leur écriture mathématique (par exemple : faire le lien entre « la moitié de » et multiplier par $\frac{1}{2}$).
- L'élève manipule des fractions jusqu'à $\frac{1}{1000}$.
- L'élève donne progressivement aux fractions le statut de nombre.
- Il connaît diverses désignations des fractions : orales, écrites et des décompositions additives et multiplicatives (ex : quatre tiers ; $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$; $1 + \frac{1}{3}$; $4 \times \frac{1}{3}$).
- Il les positionne sur une droite graduée.
- Il les encadre entre deux entiers consécutifs.
- Il écrit une fraction décimale sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.
- Il compare deux fractions de même dénominateur.
- Il connaît des égalités entre des fractions usuelles (exemples : $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$; $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$).

Nombres décimaux

Ce que sait faire l'élève

- L'élève utilise les nombres décimaux.
- Il connaît les unités de la numération décimale (unités simples, dixièmes, centièmes, millièmes) et les relations qui les lient.
- Il comprend et applique aux nombres décimaux les règles de la numération décimale de position (valeurs des chiffres en fonction de leur rang).
- Il connaît et utilise diverses désignations orales et écrites d'un nombre décimal (fractions décimales, écritures à virgule, décompositions additives et multiplicatives).
- Il utilise les nombres décimaux pour rendre compte de mesures de grandeurs ; il connaît le lien entre les unités de numération et les unités de mesure (par exemple : dixième → dm - dg - dL, centième → cm - cg - cL - centimes d'euro.
- Il repère et place un nombre décimal sur une demi-droite graduée adaptée.
- Il compare, range des nombres décimaux.
- Il encadre un nombre décimal par deux nombres entiers, par deux nombres décimaux ; il trouve des nombres décimaux à intercaler entre deux nombres donnés.

En 6^{e}

Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux

Ce que sait faire l'élève

- Il sait utiliser les grands nombres entiers.
- Il utilise des nombres décimaux ayant au plus quatre décimales.
- Il sait faire le lien entre « la moitié de » et multiplier par $\frac{1}{2}$.
- Il ajoute des fractions décimales de même dénominateur.
- Il ajoute des fractions de même dénominateur.
- Il sait utiliser des fractions pour exprimer un quotient. Il comprend que $\frac{a}{b} \times b = a$.
- Il sait utiliser des fractions pour rendre compte de mesures de grandeurs.

Progression : fraction simple, fraction décimale, écriture décimale

Définition nombres décimaux, fractions :

Fractions : lorsqu’on coupe une unité en un nombre entier de parts égales et qu’on prend un nombre entier de ces parts, éventuellement supérieur au nombre de parts contenues dans cette unité, on obtient une fraction.

Nombre décimal : nombre qui peut s’écrire sous forme de fraction décimale. Les nombres décimaux sont des nombres dont l’écriture à virgule (ou écriture décimale) comporte un nombre fini de chiffres non nuls. L’écriture décimale est un système économique de notation des décimaux (convention d’écriture) qui facilite les calculs. L’écriture décimale est un codage conventionnel d'une somme de fraction décimale

Les relations entre les différents types de nombres (ressources Eduscol):

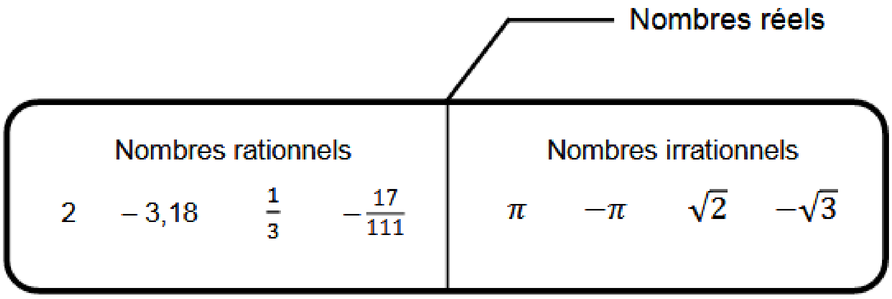
Il existe différents types ou familles de nombres ; les mathématiciens parlent d’ensembles de nombres. L’ensemble de tous les nombres que l’on peut placer sur une droite graduée s’appelle l’ensemble des **nombres réels**.

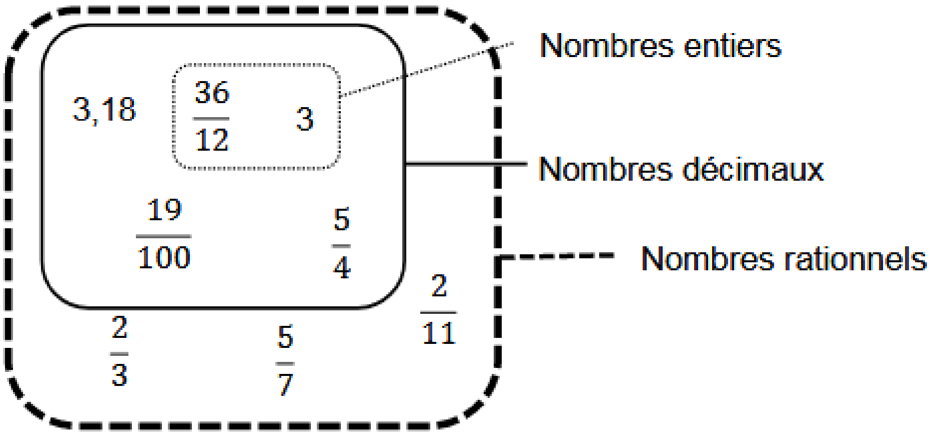
L’ensemble des nombres réels se partage en deux sous-ensembles disjoints :

- l’ensemble des **nombres rationnels**, composé de tous les nombres qui peuvent s’écrire comme une fraction. Par exemple, 2, 3,18, $\frac{1}{3}$ et $\frac{17}{111}$ sont des nombres rationnels ($2 = \frac{2}{1}$ et $3{,}18 = \frac{318}{100}$).
- l’ensemble des **nombres irrationnels**, composé de tous les nombres qui ne peuvent pas s’écrire comme une fraction. Par exemple, π et $\sqrt{2}$ sont des nombres irrationnels.

Un nombre réel est donc soit un nombre rationnel soit un nombre irrationnel.

On peut schématiser la situation de la façon suivante :





Les nombres non décimaux (rationnels ou non rationnels), comme π, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{17}{111}$, admettent une unique écriture décimale ; elle est illimitée.

Les nombres décimaux admettent :

- une infinité d'écritures décimales finies obtenues en ajoutant des 0 après la dernière décimale non nulle (2,0 ; 2,00 ; etc. 3,180 ; 3,1800 ; etc.) ;
- une écriture décimale illimitée avec des 0 à l'infini (2,000… ou 3,18000…) et pour les nombres décimaux non nuls une seconde écriture décimale illimitée avec des 9 à l'infini (2 = 1,999… et 3,18 = 3,17999…)[7].

Rupture et continuité :

Les nombres décimaux comme des nouveaux nombres :

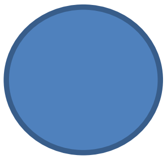
Nombres entiers positifs	Nombres décimaux positifs
Tout nombre entier a un successeur.	La notion de successeur n'a pas de sens.
Dans une série de nombres, celui qui s'écrit avec le plus de chiffres est le plus grand.	Dans une série de nombres, celui qui s'écrit avec le plus de chiffres n'est pas nécessairement le plus grand.
Il n'est pas toujours possible d'intercaler un entier entre deux entiers donnés.	Entre 2 décimaux, on peut toujours en intercaler autant que l'on veut.
Multiplier un nombre par n, c'est ajouter n fois ce nombre. Le résultat obtenu est plus grand que le nombre multiplié par n.	Multiplier un nombre par un nombre décimal, c'est prendre une fraction décimale de ce nombre. Le résultat obtenu n'est plus nécessairement plus grand que le nombre multiplié par le nombre décimal.

Continuités :

Notre système de numération est un système de position. Mais notre système de numération est un système décimal. Il ne faut donc pas oublier que les différentes unités sont liées entre elles par des relations « décimales » : 10 unités d'un certain ordre sont égales à une unité de l'ordre immédiatement supérieur, etc. Il en découle alors des relations entre les unités des différents ordres (un millier c'est 100 dizaines)

→ Ces 2 aspects sont à prolonger aux dixièmes, centièmes,…

Du matériel à manipuler :

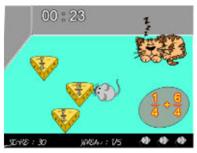


Le « glisse-nombre » est un outil permettant d'illustrer le fait que lorsque l'on multiplie ou divise un nombre par une puissance de 10 ce n'est pas la virgule qui se déplace mais les chiffres qui composent le nombre qui prennent une valeur 10 fois supérieure ou 10 fois inférieure.

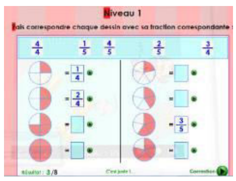
Des outils numériques :

http://www.logicieleducatif.fr/math/numeration/vise-les-fractions.php
Ce jeu a pour but de se familiariser avec la représentation graphique des fractions (et inversement).Il y a aussi les fractions décimales

http://www.jeuxpourlaclasse.fr/articles.php?lng=fr&pg=334&mnuid=1940&tconfig=
Objectif : renforcer la composition et décomposition des nombres décimaux par partie entière et fractions décimales.
But: former le plus grand nombre de familles
Une famille se compose de 4 cartes : le nombre entier et les parties décimales 10ème, 100ème et 1000ème. Ex : 1715, 756. Il faut réunir les cartes 1715 puis 7/10 5/100 et 6 /1000.
Le gagnant est celui qui a composé le plus de nombres décimaux.



http://www.jeuxmaths.fr/jeu-de-math-fractions.html
Niveau collège pour le calcul de fractions



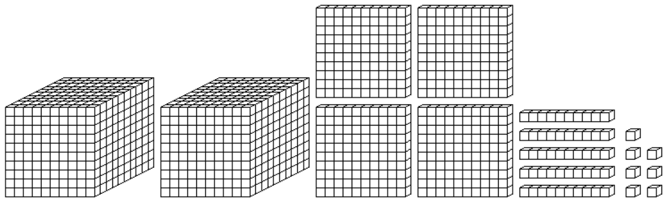
http://soutien67.free.fr/math/activites/fractions/Les%20fractions.htm
Faire correspondre la fraction avec la représentation. Une correction est proposée

https://calculatice.ac-lille.fr/spip.php?article350
Calcul@TICE : activité "Chocolat" :

Des activités :

Situation 1 : Vrai ou faux ?

L'unité est le petit cube. On a représenté ci-dessous le nombre 2 457.



Tony dit que dans ce nombre, il y a 4 centaines.
Nourredine pense que c'est faux. Qui a raison ? Pourquoi ?

Situation 2 : Ficelle

Voici un morceau de ficelle.
En prenant cette ficelle comme unité, estimez les dimensions de votre table (Largeur, longueur, hauteur).
(Variante : on peut utiliser une bande de papier au lieu d'une ficelle)

Situation 3 : Réglettes Cuisenaire

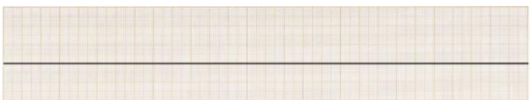
Vous disposez d'une boite de réglettes :

Numéro	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
Couleur	*blanc*	*rouge*	*vert clair*	*rose*	*jaune*	*vert foncé*	*noir*	*marron*	*bleu*	*orange*

① L'unité est définie comme étant la longueur de la réglette orange. Quelle est la longueur des réglettes jaunes, rouge et blanches ?
② L'unité est définie comme étant la longueur de la réglette bleue. Quelle est la longueur des réglettes verte et blanche ?
③ La réglette orange vaut deux unités, quelle est la longueur des réglettes jaunes, blanches, marron et roses ?
④ La réglette blanche vaut un septième de l'unité, quelle est l'unité ?
⑤ La réglette verte vaut $\frac{3}{4}$ de l'unité, quelle est l'unité ?
⑥ La réglette vert foncé vaut deux unités, combien vaut la réglette rouge ?

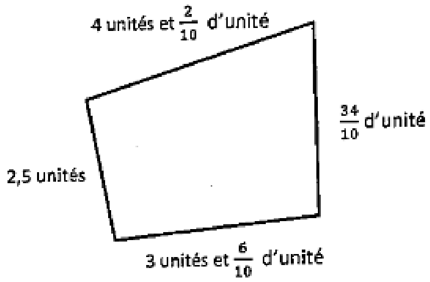
Situation 4 : Droite graduée

Placer le nombre 163 centièmes sur cette droite graduée. Donne plusieurs façons différentes d'écrire ce nombre.



Situation 5 : périmètres

Calcule le périmètre de cette figure.



Situation 6 :

Construire sur du papier millimétré une figure d'aire 8,4 cm²

Situation 7 :

Leïla veut préparer un cocktail composé de jus d'orange, de jus d'ananas et de sirop de citron.
Pour cela, elle utilise la recette suivante :

Cocktail de jus de fruit :

- 0,5 L de jus d'orange
- $\frac{1}{4}$ de litre de jus d'ananas
- $\frac{1}{10}$ de litre de sirop de citron

Après avoir effectué le mélange, Leïla se demande si elle obtient un litre de cocktail.

Propose une méthode pour répondre à cette question

Quelques recommandations :

<u>Fractions simples</u>

- Privilégier l'oral pour parler les fractions avant de présenter l'écriture fractionnaire
- Conserver l'oral, point d'appui tout au long de l'année ;
- Définir l'écriture fractionnaire en a reports de b-ièmes (et non pas a divisé par b → collège)
- Progression annuelle : commencer dès la période 2 CM1 par les fractions usuelles / période 3 fractions décimales
- Importance des bilans en fin de séance et de l'institutionnalisation au sein de la séquence → affiche de référence pour définir la fraction comme une écriture d'un nombre

<u>Fractions décimales</u>

- Travailler la graduation tout au long de l'année
- Entraîner les élèves à réactiver les 1/3, ¼ , ½
- Proposer des jeux et rituels pour entrainer
- Proposer des supports variés : travailler les grandeurs longueur, et aire en particulier pour les centièmes (situation 2 annexe 2)
- Institutionnaliser explicitement qu'il y a différentes écritures d'un même nombre (cf. rituels fleurs)

Nombres décimaux

- On aborde une nouvelle écriture et non un nouveau nombre. Distinguer l'écriture du nombre…
- Définir le nombre décimal comme un nombre pouvant s'écrire comme une fraction décimale (et non comme un *nombre* à virgule)
- Réactiver le thème 2, l'écriture fractionnaire à l'écrit et à l'oral
- Le discours du PE doit se focaliser sur les *rangs* :
    - Chiffre des unités (et non position de la virgule)
    - Chiffre prenant une valeur dix fois supérieure (et non ajout d'un zéro) : 56 x 10 = 560
    - Chiffre prenant une valeur dix fois supérieure (et non la virgule qui se déplace)
    - 6 unités et 7 dixièmes (et non « 6 virgule 7 » ni « 67 sur 10 » !).

Les erreurs :

Sur les fractions

L'él considère la barre de fraction comme un simple séparateur entre 2 entiers 3/8 = 8/3 car les 2 fractions comportent les mêmes nombres

¼ = 1.4 car la barre de fraction sépare 2 nombres entiers comme la virgule

Concevoir une fraction plus grande que 1

Sur les décimaux

1 décimal est conçu comme étant constitué de 2 entiers accolés et séparés par une virgule

20.05 : 100 = 0.25 au lieu de 0.2005 : les zéros de la partie décimale sont inutiles

Erreur de désignation entre dixièmes et dizaines

Tout nombre possède un successeur : après 3,5 il y a 3,6 et entre 2 nombres décimaux consécutifs il n'y a rien ; 0,1 devient le plus petit des décimaux

1 valeur approchée peut aussi devenir une valeur exacte comme dans 1/3 = 0,333

Des règles fausses mais performantes :

Pour ranger 3 nombres décimaux, on les range comme des entiers : le nombre le plus grand est celui qui a le plus de chiffres partie entière et décimale confondues

Le plus petit nombre est celui qui a le plus grand nombre de chiffres après la virgule

Lorsque le premier chiffre de la partie décimale est un 0 alors c'est le nombre le plus petit